المقارنة بين طريقتي بيز والامكان الاعظم لتقدير دالة معولية النظام التعاقبي للتوزيع الاسي المعمم

م.فراس منذر جاسم /الجامعة المستنصرية/كلية الادارة والاقتصاد/firasm@uomustansiriyah.edu.iq

P: ISSN : 1813-6729
E : ISSN : 2707-1359

https://doi.org/10.31272/jae.i141.1010

تأريخ أستلام البحث : 2023/10/1

مقبول للنشر بتأريخ :2023/10/18

الملخص: **Abstract**

تناولت هذه الدراسة تقدير دالة معولية النظام التعاقبي (1+1) باستخدام طريقتي بيز والامكان الاعظم ، وعندما يتبع متغيرا الاجهاد والمتانة التوزيع الاسي المعمم . اذ تم إجراء تجارب محاكاة مختلفة لايجاد تلك المقدرات والمقارنة بينها . أثبتت نتائج المحاكاة افضلية طريقة بيز في حالة احجام العينات الصغيرة والمتوسطة ، وافضلية طريقة الامكان الاعظم في حالة احجام العينات الكبيرة ، وان قيم دوال معولية النظام التعاقبي (1+1) للتوزيع الاسي المعمم تزداد بزيادة قيمة معلمة الشكل لمتغبر المتانة ، وتقل بزيادة قيمة معلمة الشكل لمتغير الاجهاد ، فضلا عن زيادة دقة التقدير عند زيادة قيمة معلمة القياس للتوزيع الاسي المعمم .

الكلمات المفتاحية : معولية النظام التعاقبي (1+1)، التوزيع الاسي المعمم ، معاينة جبس .

مجلة الادارة والاقتصاد
مجلد 48 العدد 141 / كانون الاول / 2023
الصفحات : 148 - 158

المقدمة: Introduction

تم اقتراح التوزيع الأسي المعمم (Generalized Exponential Distribution) (GED) من قبل كلا من Kundu و Gupta ، اذ يعد أحد اهم التوزيعات التي تستخدم في تطبيقات اوقات البقاء والمعولية . في اغلب التطبيقات تعاني البيانات التي تتبع توزيع (GE) من وجود القيم الشاذة مما يستوجب استخدام الطرائق الحصينة عند تقديرالمعلمات وخصائص التوزيع الاخرى . من التطبيقات المهمة في مجال المعولية هو النظام التعاقبي (Cascade System) الذي اقترحه كلا من Pandit وSriwastav كحالة خاصة من نظام الاجهاد – المتانة (Stress-Strength System) . يختلف نوع النظام التعاقبي الملائم لوصف الحالة المدروسة باختلاف طبيعة سلوك متغري الاجهاد والمتانة وعدد المكونات المتعاقبة التي يقع عليها الإجهاد وطبيعة العلاقة بين تلك المكونات المتعاقبة . وقد تناولت دراسات عديدة تقدير دالة المعولية للنظام التعافبي ، نذكر منها دراسة كلا من Pandit و Sriwastav التي تناولت تقدير دالة معولية النظام (n-cascade) عندما يتبع متغيرا الإجهاد والمتانة التوزيع الأسي[11] ، كذلك درس كلا من Raghava Char et al معولية النظام التعاقبي عندما يتبع متغيرا الاجهاد والمتانة التوزيع الطبيعي[12] . كما قام كلا من T UmaMaheswari و .N.Swathi بتقدير المعولية لنظام n-cascade عندما يتبع متغيرا الإجهاد والمتانة التوزيع الأسي المعمم [14] . كافة الدراسات المذكورة اعلاه وغيرها الكثير من الدراسات اعتمدت على استخدام طريقة الامكان الاعظم ، لذلك سيتم في هذا البحث توظيف طريقة بيز لتقدير دالة معولية نظام Cascade(1+1) عندما يتبع متغيرا الاجهاد والمتانة التوزيع الاسي المعمم لندرة الدراسات في هذا المجال ، ومن ثم مقارنة التقديرات البيزية مع تقديرات طريقة الامكان الاعظم من خلال تجارب المحاكاة .

التوزيع الاسي المعمم: Generalized Exponential Distribution (GED)

تعرف كلا من دالة الكثافة الاحتمالية $(p.d.f.)$ ، دالة الكثافة التراكمية $(c.d.f.)$ ودالة المعولية للمتغير العشوائي (x) الذي يتبع (GED) وعلى التوالي كما ياتي **[2] ,[5]** :

$$\mathbf{f(x,\varphi,\omega) = \varphi\ \omega\ (1-e^{-\omega X})^{\varphi-1}\ e^{-\omega X}\quad ,\varphi,\omega>0, x\geq 0} \qquad (1)$$

$$\mathbf{F(x,\varphi,\omega) = (1-e^{-\omega X})^{\varphi}\quad ,\quad \varphi,\omega>0, x\geq 0} \qquad (2)$$

$$\mathbf{R(x,\varphi,\omega) = 1-(1-e^{-\omega X})^{\varphi}\quad ,\varphi,\omega>0, x\geq 0} \qquad (3)$$

اذ ان $\boldsymbol{\varphi}$ تمثل معلمة الشكل (Shape Parameter) ، $\boldsymbol{\omega}$ تمثل معلمة القياس (Scale Parameter).

النظام التعاقبي: Cascade System

ليكن المتغير العشوائي $\mathbf{t}$ يمثل المتانة والمتغير العشوائي $\mathbf{s}$ يمثل الاجهاد، عندها فانه يمكن تعريف معولية نظام الاجهاد المتانة كما ياتي**[7]**:

$$\mathbf{R = Pr(\ t>s\ ) = \int_{S=0}^{\infty}\left[\int_{t=S}^{\infty} f(t)dt\right] g(s)ds} \qquad (4)$$

لنفترض أن $\mathbf{t_1, t_2, \dots, t_m}$ تمثل المتانة للمكونات $\mathbf{c_1, c_2, \dots, c_m}$ حسب ترتيب التنشيط على التوالي . وان $t_i's$ هي متغيرات عشوائية مستقلة بدوال كثافة احتمالية $\mathbf{f_j(t_j), j=1,2,\dots,m}$. وليكن s يمثل متغير الاجهاد العشوائي المؤثرعلى تلك المكونات بدالة الكثافة الاحتمالية $g(s)$، فإذا كان $s<t_1$ ، فإن المكون الأول c_1 يعمل وبالتالي يبقى النظام عاملا، واذا كان $s\geq t_1$ فان ذلك يؤدي إلى فشل c_1، وبالتالي يحل محله المكون الثاني c_2وله متانة t_2. على الرغم من أن النظام قد عانى من فقدان مكون واحد ، إلا أنه يظل على عاملا إذا كان $s<t_2$. بشكل عام ، إذا فشل المكون $(j-1)^{th}$ فسيتم تنشيط المكون j^{th} بمتانة t_i وسيتعرض للاجهاد s. يمكن للنظام ان يبقي عاملا مع فقدان المكونات $(m-1)$ إذا وإذا فقط $t_j s, j=$ $1,2,..,m-1, t_m s$، ويفشل النظام تمامًا في حالة فشل جميع المكونات ، اي عندما $t_j\leq s, j=$ $1,2,..,m$، عندها فان الاحتمال $R(m)$ يمثل فشل النظام في البقاء عاملا لاول $(m-1)$ من المكونات وبقاء المكون j^{th} نشطا ، ويعرف وفق الصيغة الاتية**[9]**، **[11]**، **[14]**:

$$\mathbf{R(m) = Pr\left\{\left(\bigcap_{j=1}^{m-1} t_i\leq s\right)\bigcap(t_m>\ s)\right\}\qquad j=1,2,\dots,m} \qquad (5)$$

$\mathbf{R(2), R(3), \dots, R(m)}$ هي دوال المعولية عند إضافة المكونات $\mathbf{2^{nd}}$، $\mathbf{3^{rd}}$ و $\mathbf{m^{th}}$ على التوالي، اي ان:

$$\mathbf{R(m) = Pr(t_1\leq s, t_2\leq s, \dots, t_{m-1}\leq s, t_m>s)} \qquad (6)$$

ويمكن ربط عامل التوهين للمكون m^{th} بمتغير الاجهاد s. في بحثنا هذا تم افتراض ان قيمة عامل التوهين تساوي 1. لنفترض أن $g(s)$ و $f_j(t_j)$ هي دالة كثافة الاحتمال لكل من s و $t_j, j = 1,2, \dots, m$ على التوالي، عندها فانه يمكن كتابة المعادلة (6) بالشكل الاتي:

$$R(m) = \int_0^{\infty} \left[\int_0^S f_1(t_1)dt_1 \int_0^S f_2(t_2)dt_2 \dots \int_0^S f_{m-1}(t_{m-1})dt_{m-1} \int_y^{\infty} f_m(t_m)dt_m \right] g(s)ds$$

$$R(m) = \int_0^{\infty} [F_1(s)\, F_2(s) \dots F_{m-1}(s)\, \bar{F}_m(s)]\, g(s)ds \qquad (7)$$

اذ ان $F_j(s) = \int_0^S f_1(t_1)dt_i$ وان $\bar{F}_j(s) = F_j(s)$

واذا كانت دالتي الكثافة الاحتمالية ودالتي التوزيع لمتغري الاجهاد والمتانة تتبع التوزيع الاسي المعمم، عندها فان:

$$f(t,\sigma,\Omega) = \sigma\, \Omega\, (1 - e^{-\Omega t})^{\sigma-1}\, e^{-\Omega t}\ , \quad F(t,\sigma,\Omega) = (1 - e^{-\Omega t})^{\sigma}\ , \quad \sigma,\Omega > 0, t \geq 0$$

$$g(s,\mu,\Omega) = \mu\, \Omega\, (1 - e^{-\Omega S})^{\mu-1}\, e^{-\Omega S}\ , G(s,\mu,\Omega) = (1 - e^{-\Omega S})^{\mu}\ , \quad \mu,\Omega > 0, s \geq 0$$

عندها فانه يمكن إيجاد دالة معولية النظام التعاقبي للمكون الأول بالاعتماد المعادلة (5) وكما ياتي:

$$R(1) = Pr(t_1 > s) = \int_{S=0}^{\infty} \left[\int_{t_1=S}^{\infty} f_1(t_1)dt_1 \right] g(s)ds = \int_0^{\infty} F_1(s)\, g(s)ds$$

$$R(1) = \int_0^{\infty} \{1 - (1 - e^{-\Omega S})^{\sigma}\}\, \mu\, \Omega\, (1 - e^{-\Omega S})^{\mu-1}\, e^{-\Omega S}\, dS$$

$$R(1) = \int_0^{\infty} \mu\, \Omega \left(1 - e^{-\Omega S}\right)^{\mu-1} e^{-\Omega S}\, ds - \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-\Omega S}\right)^{\sigma} \mu\, \Omega \left(1 - e^{-\Omega S}\right)^{\mu-1} e^{-\Omega S}\, ds \qquad (8)$$

يمكن الحصول على حل للمعادلة (8) باستخدام التحويل الاتي:

$$v = 1 - e^{-\Omega S} \Rightarrow dv = \Omega\, e^{-\Omega S}\, ds, s = 0 \Rightarrow v = 0, s = \infty \Rightarrow v = 1$$

عندها فان:

$$R(1) = 1 - \int_0^1 \mu\, v^{\sigma+\delta-1}\, dv = 1 - \frac{\mu}{\sigma + \mu} = \frac{\sigma}{\sigma + \mu} \qquad (9)$$

ويمكن ايضا إيجاد دالة معولية النظام التعاقبي للمكون الثاني على النحو الاتي:

$$R(2) = Pr(t_1 \leq s, t_2 > s) \int_{S=0}^{\infty} \left[\int_{t_1=0}^{S} f_1(t_1)dt_1 \int_{t_2=S}^{\infty} f_2(t_2)dt_2 \right] g(s)ds$$

$$R(2) = \int_0^{\infty} F_1(s)\, \bar{F}_2(s) g(s)ds$$

$$R(2) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\Omega S})^{\sigma}\, [1 - (1 - e^{-\Omega S})^{\sigma}]\, \mu\, \Omega (1 - e^{-\Omega S})^{\mu-1}\, e^{-\Omega S}\, ds$$

$$R(2) = \int_0^{\infty} [(1 - e^{-\Omega S})^{\sigma} - (1 - e^{-\Omega S})^{2\sigma}]\ \mu\, \Omega\, (1 - e^{-\Omega S})^{\mu-1}\, e^{-\Omega S}\, ds \quad (10)$$

$$R(2) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\Omega S})^{\sigma}\, \mu\, \Omega (1 - e^{-\Omega S})^{\mu-1} e^{-\Omega S} ds - \int_0^{\infty} (1 - e^{-\Omega S})^{2\sigma}\, \mu\, \Omega (1 - e^{-\Omega S})^{\mu-1}\, e^{-\Omega S}\, ds$$

وباجراء التحويل السابق على المعادلة (10) نحصل على:

$$R(2)=\frac{\mu}{\sigma+\mu}-\int_0^1 \mu\, v^{2\sigma+\mu-1}\,dv=\frac{\mu}{\sigma+\mu}-\frac{\mu}{2\sigma+\mu}=\frac{2\sigma\mu+\mu^2-\sigma\mu-\mu^2}{(\sigma+\mu)(2\sigma+\mu)}$$

$$R(2)=\frac{\sigma\,\mu}{(\sigma+\mu)(2\sigma+\mu)} \qquad (11)$$

كما ويمكن إيجاد دالة معولية النظام التعاقبي للمكون الثالث باتباع الخطوات السابقة ذاتها:

$$R(3)=\Pr(t_1\le s, t_2\le s, t_3>s)$$

$$R(3)=\int_{S=0}^{\infty}\left[\int_{t_1=0}^{S} f_1(t_1)dt_1 \int_{t_2=0}^{S} f_2(t_2)dt_2 \int_{t_2=s}^{\infty} f_3(t_3)dt_3\right] g(s)ds$$

$$R(3)=\int_0^{\infty} F_1(s)\,F_2(s)\,\bar{F}_3(s)\,g(s)ds$$

$$R(3)=\int_0^{\infty}(1-e^{-\Omega S})^{\sigma}\,(1-e^{-\Omega S})^{\sigma}\{1-(1-e^{-\Omega S})^{\sigma}\}\,\mu\,\Omega\,(1-e^{-\Omega S})^{\mu-1}\,e^{-\Omega S}ds$$

$$R(3)=\int_0^{\infty}[(1-e^{-\Omega S})^{2\sigma}-(1-e^{-\Omega S})^{3\sigma}]\,\mu\,\Omega(1-e^{-\Omega S})^{\mu-1}\,e^{-\Omega S}ds$$

$$R(3)=\int_0^{\infty}(1-e^{-\Omega S})^{2\sigma}\,\mu\,\Omega(1-e^{-\Omega S})^{\mu-1}e^{-\Omega S}ds-\int_0^{\infty}(1-e^{-\Omega S})^{3\sigma}\,\mu\,\Omega(1-e^{-\Omega S})^{\mu-1}e^{-\Omega S}ds$$

$$R(3)=\frac{\mu}{2\sigma+\mu}-\int_0^{\infty} v^{3\theta+\mu-1}\,dv=\frac{\mu}{2\sigma+\mu}-\frac{\mu}{3\sigma+\mu}=\frac{3\sigma\mu+\mu^2-2\sigma\mu-\mu^2}{(2\sigma+\mu)(3\sigma+\mu)}$$

$$R(3)=\frac{\sigma\,\mu}{(2\sigma+\mu)(3\sigma+\mu)} \qquad (12)$$

بصورة عامة ومما تقدم فان:

$$R(j)=\frac{\sigma\,\mu}{\{(j-1)\sigma+\mu\}\{j\,\sigma+\mu\}} \qquad (13)$$

وان المعولية الكلية للنظام التعاقبي ولتكن RC، تمثل حاصل جمع دوال المعولية الحدية، اي ان:

$$RC=R(1)+R(2)+\cdots+R(m)=\sum_{j=1}^{m}R(j)\quad, j=1,2,\ldots,m \qquad (14)$$

طريقة الإمكان الأعظم: Maximum Likelihood Method

بصورة عامة فانه للعينة العشوائية $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ التي تتبع (GED) بمعلمة الشكل (φ) ومعلمة القياس (ω) وبدالة كثافة معرفة وفق المعادلة (1) ، عندها فإنه يمكن ايجاد مقدري الامكان الاعظم للمعلمتين φ و ω وفق الخطوات الاتية **[2] ,[5], [6]**:

$$L(x_i,\varphi,\omega)=\varphi^n\omega^n\prod_{i=1}^{n}(1-e^{-\omega X_i})^{\varphi-1}\,e^{-\omega X_i} \qquad (15)$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة (15) نحصل على:

$$\ln L(x_i,\varphi,\omega)=n\ln(\varphi)+n\ln(\omega)+(\varphi-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(1-e^{-\omega X_i})-\omega\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad (16)$$

وبأخذ المشتقة الأولى لطرفي المعادلة (16) بالنسبة للمعلمة (φ) وبالنسبة الى المعلمة (ω) نحصل على التوالي على:

$$\frac{\partial \ln L(x_i,\varphi,\omega)}{\partial \varphi}=\frac{n}{\varphi}-\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-e^{-\omega x_i}\right) \qquad (17)$$

$$\frac{\partial \ln L(x_i,\varphi,\omega)}{\partial \omega}=\frac{n}{\omega}+(\varphi-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i\, e^{-\omega x_i}}{1-e^{-\omega x_i}}-\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad (18)$$

وبمساواة المعادلة (18) بالصفر نحصل على:

$$\hat{\sigma}(\omega)=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-e^{-\omega x_i}\right)} \qquad (19)$$

عندها يمكن إيجاد مقدر طريقة الإمكان الأعظم لمعلمة الشكل (φ) وليكن $(\widehat{\varphi}_{ML})$ كدالة بدلالة المعلمة (ω)، وذلك بالتعويض عن (φ) بـ $\widehat{\varphi}(\omega)$ في المعادلة (19) لنحصل على:

$$f(\omega)=\ln L[\hat{\sigma}(\omega),\omega]=$$

$$[n\ln(n)-n]-n\ln\sum_{i=1}^{n}-\ln\left(1-e^{-\omega x_i}\right)+n\ln(\omega)-\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-e^{-\omega x_i}\right)-\omega\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad (20)$$

وقد وجد كلا من (Gupta) و(Kundu) ان الدالة $f(\omega)$ هي عبارة عن دالة أحادية الجذور (Unimodel Function) وانه يمكن إيجاد قيمة $\widehat{\varphi}(\omega)$ التي تجعل المعادلة (16) اعظم ما يمكن ولتكن $g(\omega)=\omega$ على النحو الاتي:

$$g(\omega)=\omega=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i e^{-\omega x_i}}{1-e^{-\omega x_i}}}{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-e^{-\omega x_i}\right)}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-e^{-\omega x_i}}\right]^{-1} \qquad (21)$$

ومن خلال التعويض التكراري بطريقة نيوتن – رافسون (Newton-Raphson method) يمكن ايجاد حل للمعادلة (21) والحصول على مقدر طريقة الإمكان الأعظم لمعلمة القياس (ω) وليكن $(\widehat{\omega}_{ML})$، عندها يمكن إيجاد مقدر معلمة الشكل (φ) بالتعويض عن مقدر معلمة القياس في المعادلة (20).

مما تقدم وبافتراض ان معلمتي الشكل (σ) و (μ) لمتغيري الاجهاد والمتانة على التوالي، فانه يمكن الحصول على مقدرات دالة المعولية للنظام التعاقبي بناءًا على خاصية الثبات، أي باستبدال (σ) و (μ) في المعادلة (13) بـ $(\widehat{\sigma}_{ML})$ و $(\widehat{\mu}_{ML})$ على التوالي، وكما ياتي:

$$\widehat{R}(j)_{ML}=\frac{\widehat{\sigma}_{ML}\,\widehat{\mu}_{ML}}{\{(j-1)\widehat{\sigma}_{ML}+\widehat{\mu}_{ML}\}\{j\,\widehat{\sigma}_{ML}+\widehat{\mu}_{ML}\}} \qquad (22)$$

طريقة بيز: Bayes Method

في هذا المبحث سوف نستخدم طريقة بيز لتقدير المعلمات العشوائية للتوزيع الاسي المعمم، بافتراض أن التوزيعات الاولية للمعلمتين σ ، μ و Ω هي توزيعات جاما الاولية الاتية **[8]**:

$$\pi(\sigma)\propto\sigma^{a-1}e^{-b\sigma}\qquad ,\sigma,a,b>0 \qquad (23)$$

$$\pi(\mu)\propto\mu^{c-1}e^{-d\mu}\qquad ,\mu,c,d>0 \qquad (24)$$

$$\pi(\Omega)\propto\Omega^{h-1}e^{-k\Omega}\qquad ,\Omega,h,k>0 \qquad (25)$$

وبالتالي دالة التوزيع الاولي المشتركة لمعلمات متغري الاجهاد والمتانة **t** و **s** اللذان يتبعان التوزيع الاسي المعمم تعرف كما ياتي:

$$\pi(\sigma,\mu,\Omega)\propto\ \Omega^{a-1}\,\mu^{c-1}\Omega^{2(h-1)}e^{-b\sigma}\,e^{-d\mu}\,e^{-2k\Omega}\qquad ,\sigma,\mu,\Omega,a,b,c,d,h,k>0 \qquad (26)$$

اذ ان المعلمات a ، b، c، d، h و k معلومة وغير سالبة.

ثم يمكننا الحصول على دالة التوزيع اللاحقة المشتركة للمعلمات σ ،μ و Ω على النحو التالي **[1]**:

$$P(\sigma,\mu,\Omega|t,s)=\frac{L(t,s|\sigma,\mu,\Omega)\,\pi(\sigma,\mu,\Omega)}{\int\int\int_{\forall\sigma\forall\mu\forall\Omega}L(t,s|\sigma,\mu,\Omega)\,\pi(\sigma,\mu,\Omega)\,d\sigma\,d\mu\,d\Omega} \qquad (27)$$

اذ ان $L(t,s|\sigma,\mu,\Omega)$ تمثل دالة الامكان الاعظم المشتركة لمشاهدات المتغيرين **t** و**s**، **اي ان :**

$$L(t,s|\sigma,\mu,\Omega) = \sigma^n \mu^n \Omega^{2n} e^{-b\sigma} e^{-d\mu} \prod_{i=1}^{n} A(\Omega)^{\sigma-1} \prod_{i=1}^{n} A(\Omega)^{\mu-1}\ e^{-\Omega C(\Omega)} \quad (28)$$

اذ ان: $A(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - e^{-\Omega t_i})$ و $C(\Omega) = 2(\sum t_i + k)$.

وعليه فان دالة التوزيع اللاحقة المشتركة ستكون وفق الصيغة الاتية:

$$P(\sigma,\mu,\Omega|t,s) = \frac{\sigma^{n+a-1} \mu^{n+c-1} \Omega^{2(n+h-1)}\ e^{-\sigma[b-A(\Omega)]}\ e^{-\mu[d-A(\Omega)]}\ e^{-\Omega C(\Omega)}}{\iiint_{\forall\sigma\forall\mu\forall\Omega} \sigma^{n+a-1}\ \mu^{n+c-1} \Omega^{2(n+h-1)} e^{-\sigma[b-A(\Omega)]} e^{-\mu[d-A(\Omega)]}\ e^{-\Omega C(\Omega)} d\sigma\, d\mu\, d\Omega} \quad (29)$$

وان مقدر بيز باستعمال دالة خسارة مربع الخطا لدوال معولية النظام التعاقبي هي عبارة دالة بدلالة المعلمات الثلاثة، لذلك فهو عبارة عن توقع التوزيع اللاحق **[3]**:

$$\hat{R}(j)_B = \iiint_{\forall\sigma\forall\mu\forall\Omega} R(j)\, P(\sigma,\mu,\Omega|t,s) \quad , \quad j = 1,2,\dots,m$$

$$= \frac{\iiint_{\forall\sigma\forall\mu\forall\Omega} R(j)\ \sigma^{n+a-1} \mu^{n+c-1} \Omega^{2(n+h-1)}\ e^{-\sigma[b-A(\Omega)]}\ e^{-\mu[d-A(\Omega)]}\ e^{-\Omega C(\Omega)}\ d\sigma\, d\mu\, d\Omega}{\iiint_{\forall\sigma\forall\mu\forall\Omega} \sigma^{n+a-1} \mu^{n+c-1} \Omega^{2(n+h-1)}\ e^{-\sigma[b-A(\Omega)]}\ e^{-\mu[d-A(\Omega)]}\ e^{-\Omega C(\Omega)}\ d\sigma\, d\mu\, d\Omega} \quad (30)$$

يتضح من خلال المعادلة (30) انه ليس من السهل ايجاد المقدرات بشكل مباشر، لذلك سنلجا الى طرائق سلسلة ماركوف مونت كارلو (MCMC) التقريبية. يمكن ايجاد حلول للتكاملات النسبية للتوزيع اللاحق في الصيغ (29) و (30) باستخدام معاينة جبس (Gibbs Sampling) بصورة مباشرة اذا كانت التوزيعات الشرطية $P(\mu|\sigma,\Omega)$، $P(\theta|\mu,\Omega)$ معروفة، وكما هو واضح فان:

$$P(\sigma|\mu,\Omega,t,s) \sim Gamma[\{n+a\},\{b-A(\Omega)\}] \quad (31)$$

$$P(\mu|\sigma,\Omega,t,s) \sim Gamma[\{n+c\},\{d-A(\Omega)\}] \quad (32)$$

اما فيما يخص التوزيع الشرطي $P(\Omega|\sigma,\mu)$ فيجب ملاحظة انه اذا كانت $\sigma,\mu \geq 1$، عندها فانه يمكن توليد العينات العشوائية بشكل مباشر من التوزيع الشرطي اللاحق، وذلك من خلال المشتقة الثانية للتوزيع الشرطي بالنسبة للمعلمة φ، اعني $\frac{\partial^2 P(\Omega|\sigma,\mu)}{\partial\Omega^2}$ ، وبالاعتماد على طريقة Devroye العامة لتوليد عينة عشوائية من دالة الكثافة اللوغاريتمية المقعرة (log-concave density) **[4]**، اذ ان:

$$P(\Omega|\sigma,\mu,t,s) \propto \Omega^{2(n+h-1)} e^{-\Omega C(\Omega)} \propto Gamma[(2n+2h-1), C(\Omega)] \quad (33)$$

اما اذا كانت $\sigma,\mu < 1$ عندها لايمكن توليد التوزيع الشرطي $P(\Omega|\sigma,\mu)$ بشكل مباشر، لذلك يمكننا الاعتماد على الاحصاءات المرتبة لتوزيع (GE) لتوليد عينات جبس العشوائية، حتى نتمكن من ذلك يمكن إعادة كتابة (33) على النحو التالي:

$$P^*(\Omega|\sigma,\mu,t,s) = \left(1 - e^{-\Omega t_{(1)}}\right)^{\sigma-1} \left(1 - e^{-\Omega t_{(1)}}\right)^{\mu-1} e^{-\Omega t_{(1)}} e^{-\Omega S_{(1)}} \left[e^{-\Omega(a+c+\sum_{i=2}^{n} t_{(i)}} e^{-\Omega(b+d+\sum_{i=2}^{n} S_{(i)}}\right] \quad (34)$$

اذ ان $t_{(1)},\dots,t_{(n)}$ و $S_{(1)},\dots,S_{(n)}$ تمثل الاحصاءات المرتبة لمشاهدات متغيرات الاجهاد والمتانة، عندها وبالاعتماد على قاعدة الرفض القبول، فانه يمكن توليد عينات جبس العشوائية للتوزيع الشرطي اللاحق $P^*(\Omega|\sigma,\delta,t,s)$**[4]**. ويمكن تلخيص خطوات إيجاد تقديرات دوال معولية النظام التعاقبي لمتغيرات الاجهاد والمتانة التي تتبع توزيع (GE) باستخدام معاينة جبس على النحو التالي:

1. نفترض القيم الأولية للمعلمات Ω,μ,σ **ولتكن** Ω_0,μ_0,σ_0.
2. في الخطوة q^{th}، فان المعلمات Ω,μ,σ تاخذ القيم Ω_q,μ_q,σ_q، ويمكن توليدها من خلال التوزيعات الشرطية $P(\sigma|\mu,\Omega,t,s)$، $P(\mu|\sigma,\Omega,t,s)$ و $P(\Omega|\sigma,\mu,t,s)$ او $P^*(\Omega|\sigma,\mu,t,s)$ على التوالي ، اي من خلال المعادلات (31) ، (32) واما (33) او (34).
3. يتم حساب دوال المعولية التعاقبية $\hat{R}(j)_q$ من خلال المعادلة (30).
4. اجعل $q = q + 1$
5. توليد المعلمات $\Omega_{q+1},\mu_{q+1},\sigma_{q+1}$ **وايجاد** $\hat{R}(j)_{q+1}$ ، .
6. تكرار الخطوات 2 الى 5 بحيث ان $q = 1,2,\dots,Q$.

7. مقدر طريقة بيز لـ $\hat{R}(j)_B$ تحت دالة الخسارة التربيعية يحسب وفق الصيغة الاتية:

$$\hat{R}(j)_B = \frac{1}{Q-U}\sum_{q=U+1}^{Q}\hat{R}(j)_q \qquad (35)$$

اذ ان U هو عدد المشاهدات التي يتم حرقها لإزالة تأثير قيم العينات الأولية.

المحاكاة: Simulation

تشمل تجارب المحاكاة المراحل والخطوات التالية :

المرحلة الأولى : اختيار احجام العينات وهي $n = 25, 50, 75, 100$، واختيار القيم التجريبية او الافتراضية الاتية للمعلمات $\Omega = 0.5, 1, 3$، $\sigma, \mu = 0.5, 1, 3, 5$.

المرحلة الثانية : استنادا الى قيم المعلمات وأحجام العينات المفترضة في المرحلة الأولى، في هذه المرحلة يتم توليد المتغيرات العشوائية t و s والتي يتبع التوزيع الأسي المعمم بالمعلمات $(\Omega،\sigma)$ و $(\Omega،\mu)$ على التوالي، فضلا عن توليد التوزيعات المسبقة للمعلمات العشوائية σ، μ و Ω التي تتبع توزيعات كاما والمعرفة في المعادلة (26)، علما انه تم اختيار قيم معلمات التوزيعات المسبقة على النحو الاتي: $a, c, h = \sigma$، $b, d, k = \Omega$.

المرحلة الثالثة : تضمنت هذه المرحلة تقدير دوال المعولية للنظام الاحتياطي **cascade(1+1)** لتوزيع (GE) ، اعني $R(1)$ ، $R(2)$ و RC ، وذلك باستخدام طريقتي الامكان الاعظم وبيز بمعاينة جبس ، وذلك بالاعتماد على الصيغ التي تم تناولها في الجانب النظري من هذا البحث ، فضلا عن حساب الجذر التربيعي لمتوسط المربعات الخطا (MSE) ، علما ان تكرار المراحل والخطوات السابقة **هو** $Q = 5000$.

النتائج والمناقشة: Results and discussion

تم الحصول على نتائج تجارب المحاكاة باستخدام البرنامج الاحصائي **(R 4.1.3) [13]** ، وتم وضعها في الجداول (1)، (2) و (3) ادناه.

الجدول (1) قيم دالة معولية النظام التعاقبي (1+1) المقدرة وقيم MSE عندما $\Omega = 0.5$

σ	μ	n	Real			Estimate		MSE	
			$R(1)$	$R(2)$	RC	$\hat{RC}_{ML}$	$\hat{RC}_B$	$\hat{RC}_{ML}$	$\hat{RC}_B$
0.5	0.5	25	0.5	0.1667	0.6667	0.69002	0.6885	0.03011	0.02834
		50				0.63597	0.6366	0.02641	0.02508
		100				0.64005	0.6390	0.02289	0.02367
	1	25	0.3333	0.1667	0.5	0.482	0.4826	0.01222	0.01169
		50				0.5054	0.5051	0.01084	0.01042
		100				0.48636	0.4859	0.00945	0.00987
	3	25	0.1429	0.1071	0.25	0.23786	0.2383	0.00895	0.00859
		50				0.23978	0.2400	0.00796	0.00767
		100				0.24108	0.2407	0.00695	0.00727
1	0.5	25	0.6667	0.1333	0.8	0.76048	0.7619	0.0326	0.03068
		50				0.82137	0.8205	0.03173	0.02997
		100				0.76626	0.7649	0.02841	0.02921
	1	25	0.5	0.1667	0.6667	0.67365	0.673	0.01301	0.01245
		50				0.64728	0.6476	0.0125	0.01198
		100				0.67115	0.6717	0.01107	0.01152
	3	25	0.25	0.15	0.4	0.40613	0.4056	0.00949	0.00912
		50				0.38657	0.3868	0.0091	0.00874
		100				0.40427	0.4047	0.00804	0.00839
3	0.5	25	0.8571	0.0659	0.9230	0.94694	0.9453	0.03532	0.03321
		50				0.88301	0.8839	0.03438	0.03246
		100				0.94087	0.9422	0.03081	0.03165
	3	25	0.5	0.1667	0.6667	0.64937	0.6498	0.01008	0.00967
		50				0.66991	0.6696	0.00966	0.00929
		100				0.65132	0.6508	0.00853	0.00891
	5	25	0.375	0.1705	0.5455	0.54785	0.5474	0.00733	0.00706
		50				0.53268	0.5328	0.00701	0.00675
		100				0.53359	0.5332	0.00618	0.00646
5	0.5	25	0.9091	0.0432	0.9523	0.90812	0.9097	0.03827	0.03598
		50				0.97524	0.9743	0.03719	0.03508

		100				0.97123	0.9727	0.03324	0.03414
	3	25	0.625	0.1442	0.7692	0.77270	0.7721	0.01071	0.01028
		50				0.75113	0.7514	0.01026	0.00985
		100				0.77066	0.7711	0.00906	0.00944
	5	25	0.5	0.1667	0.6667	0.65176	0.6521	0.00776	0.00747
		50				0.66769	0.6674	0.00743	0.00715
		100				0.66674	0.6670	0.00654	0.00684

الجدول (2) قيم دالة معولية النظام التعاقبي (1+1) المقدرة وقيم MSE عندما $\Omega = \mathbf{1}$

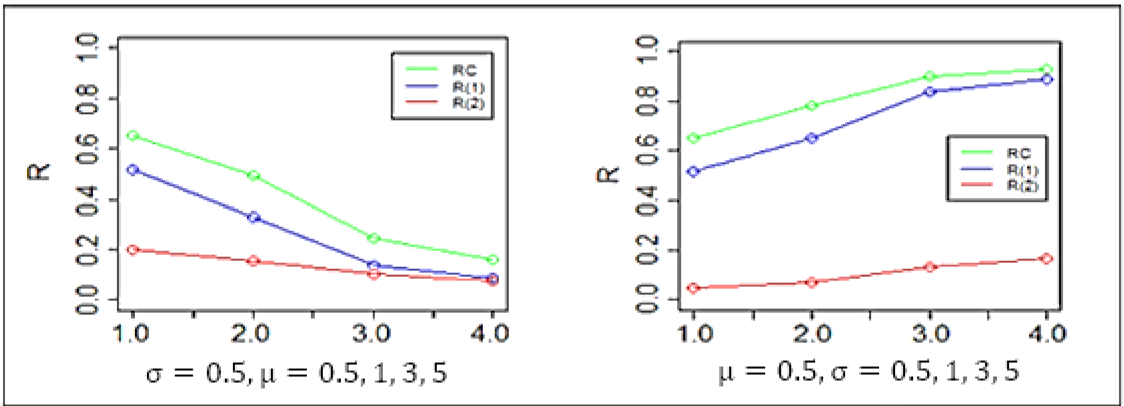
σ	μ	n	Real			Estimate		MSE	
			R(1)	R(2)	RC	$\widehat{RC}_{ML}$	$\widehat{RC}_{B}$	$\widehat{RC}_{ML}$	$\widehat{RC}_{B}$
0.5	0.5	25	0.5	0.1667	0.6667	0.6346	0.63597	0.02797	0.02635
		50				0.68755	0.63988	0.02548	0.02417
		100				0.64329	0.64223	0.02215	0.02289
	1	25	0.3333	0.1667	0.5	0.48506	0.48565	0.01153	0.01104
		50				0.48704	0.50766	0.01059	0.01017
		100				0.48881	0.48836	0.00924	0.00964
	3	25	0.1429	0.1071	0.25	0.23952	0.23995	0.00848	0.00814
		50				0.25651	0.24122	0.00779	0.0075
		100				0.2423	0.24196	0.00681	0.00711
1	0.5	25	0.6667	0.1333	0.8	0.82617	0.82474	0.03026	0.02849
		50				0.82411	0.76871	0.02944	0.02782
		100				0.82064	0.82193	0.02636	0.0271
	1	25	0.5	0.1667	0.6667	0.6764	0.67577	0.01228	0.01175
		50				0.67558	0.65152	0.01180	0.0113
		100				0.674	0.67456	0.01044	0.01087
	3	25	0.25	0.15	0.4	0.40769	0.40723	0.00899	0.00864
		50				0.40703	0.38923	0.00862	0.00828
		100				0.40591	0.40633	0.00760	0.00794
3	0.5	25	0.8571	0.0659	0.9230	0.88679	0.8883	0.03276	0.03084
		50				0.88878	0.94712	0.03190	0.03012
		100				0.89259	0.89124	0.02856	0.02935
	3	25	0.5	0.1667	0.6667	0.65316	0.65365	0.00954	0.00916
		50				0.65391	0.67254	0.00914	0.00879
		100				0.65503	0.65459	0.00808	0.00843
	5	25	0.375	0.1705	0.5455	0.55024	0.54988	0.00696	0.0067
		50				0.54983	0.53593	0.00666	0.00641
		100				0.53658	0.53627	0.00586	0.00613
5	0.5	25	0.9091	0.0432	0.9523	0.98088	0.9793	0.03550	0.03338
		50				0.97845	0.91753	0.03447	0.03253
		100				0.92045	0.91903	0.0308	0.03164
	3	25	0.625	0.1442	0.7692	0.77607	0.77556	0.01013	0.00972
		50				0.77528	0.75571	0.0097	0.00932
		100				0.77411	0.77457	0.00857	0.00894
	5	25	0.5	0.1667	0.6667	0.65545	0.65582	0.00736	0.00709
		50				0.65604	0.67048	0.00704	0.00679
		100				0.66978	0.67012	0.0062	0.00649

الجدول (3) قيم دالة معولية النظام التعاقبي (1+1) المقدرة وقيم MSE عندما $\Omega = 3$

σ	μ	n	Real			Estimate		RMSE	
			R(1)	R(2)	RC	$\widehat{RC}_{ML}$	$\widehat{RC}_{B}$	$\widehat{RC}_{ML}$	$\widehat{RC}_{B}$
0.5	0.5	25	0.5	0.1667	0.6667	0.6379	0.63856	0.02582	0.0244
		50				0.6424	0.64314	0.02354	0.0224
		100				0.6797	0.64731	0.01966	0.02044
	1	25	0.3333	0.1667	0.5	0.4867	0.48681	0.01084	0.0104
		50				0.4887	0.48897	0.00981	0.00944
		100				0.5047	0.49077	0.00817	0.00855
	3	25	0.1429	0.1071	0.25	0.2406	0.24062	0.00799	0.00769
		50				0.2421	0.2423	0.00722	0.00696
		100				0.2540	0.24363	0.00601	0.00629

1	0.5	25	0.6667	0.1333	0.8	0.7681	0.76811	0.02855	0.02691
		50				0.7731	0.77384	0.02606	0.02475
		100				0.8140	0.77843	0.02178	0.02262
	1	25	0.5	0.1667	0.6667	0.6515	0.65157	0.01195	0.01145
		50				0.6537	0.65406	0.01083	0.01041
		100				0.6715	0.65606	0.00901	0.00943
	3	25	0.25	0.15	0.4	0.3891	0.38918	0.0088	0.00847
		50				0.3908	0.39102	0.00796	0.00768
		100				0.4039	0.3925	0.00662	0.00694
3	0.5	25	0.8571	0.0659	0.9230	0.8878	0.88782	0.02871	0.02691
		50				0.8933	0.89414	0.02616	0.02475
		100				0.9382	0.89919	0.02184	0.02262
	3	25	0.5	0.1667	0.6667	0.6538	0.65386	0.00882	0.00847
		50				0.6556	0.65589	0.00798	0.00768
		100				0.6701	0.65751	0.00663	0.00694
	5	25	0.375	0.1705	0.5455	0.5357	0.53578	0.00648	0.00623
		50				0.5370	0.53727	0.00585	0.00565
		100				0.5479	0.53848	0.00486	0.0051
5	0.5	25	0.9091	0.0432	0.9523	0.9138	0.91385	0.03713	0.03488
		50				0.9199	0.92079	0.03394	0.03216
		100				0.9693	0.92635	0.02841	0.02944
	3	25	0.625	0.1442	0.7692	0.755	0.75613	0.01093	0.01049
		50				0.7569	0.75723	0.00988	0.00951
		100				0.7728	0.75901	0.00823	0.00862
	5	25	0.5	0.1667	0.6667	0.6557	0.65577	0.00798	0.00768
		50				0.6572	0.65741	0.00721	0.00695
		100				0.6690	0.65873	0.006	0.00628

يتضح من خلال الجداول المذكورة ان قيم RC، $R(1)$ و$R(2)$ الحقيقية والمقدرة على حد سواء كانت اقل عندما $\sigma = 0.5$، $\mu = 5$ واكبر عندما $\sigma = 5$ ، $\mu = 0.5$. وان قيم MSE كانت اقل عندما n=100 واكبر عندما n=25. كذلك فان قيم MSE الاكبر سجلت عندما $\sigma = 5$، والقيم الاقل لـ MSE سجلت عندما $\sigma = 0.5$. والعكس صحيح في تقييم تاثير المعلمة μ، اذ تم تسجيل القيم الاكبر لـ MSE عندما $\mu = 0.5$، والقيم الاقل عندما $\mu = 5$. وان قيم MSE كانت اكبر عندما $\Omega = 0.5$ واقل عندما $\Omega = 3$. فضلا عن ان قيم MSE كانت اقل عند تقدير RC بطريقة بيز عندما $n = 25{,}50$، اما عندما $n = 100$ فان قيم MSE كانت في اغلب التجارب كانت اقل عند تقدير RC بطريقة ML. والشكل (1) ادناه يمثل قيم RC، $R(1)$ و$R(2)$ المقدرة بطريقة بيز لقيم مختارة للمعلمتين σ وμ.



الشكل (1) الدوال RC، $R(1)$ و$R(2)$ المقدرة بطريقة بيز لقيم مختلفة للمعلمتين σ و μ

الاستنتاجات: Conclusions

من خلال نتائج المحاكاة تم التوصل الى الاستنتاجات الاتية:

1. تزداد دقة تقدير دالة معولية النظام التعاقبي (1+1) للتوزيع الاسي المعمم بزيادة حجم العينة .

2. طريقة بيز افضل من طريقة الامكان الاعظم في تقدير دالة معولية النظام التعاقبي (1+1) للتوزيع الاسي المعمم في حالة احجام العينات الصغيرة والمتوسطة، في حين ان طريقة الامكان الاعظم افضل في حالة احجام العينات الكبيرة.
3. تزداد قيم دوال معولية النظام التعاقبي (1+1) للتوزيع الاسي المعمم بزيادة قيمة معلمة الشكل لمتغبر المتانة ، وتقل قيم دوال معولية النظام التعاقبي (1+1) بزيادة قيمة معلمة الشكل لمتغير الاجهاد.
4. عند زيادة قيمة معلمة القياس للتوزيع الاسي المعمم تزداد دقة تقدير دوال معولية نظام النظام التعاقبي (1+1) عند استخدام طريقتي بيز والامكان الاعظم على حد سواء .

المصادر: References

1. A.L FIRAS MONTHER AL-BADRAN. (2019). “Bayes Estimation under Balanced Loss Functions”. Journal of Administration & Economics, 42(119), pp.108-120.
2. Almongy, H., Almetwally, E. (2020). “Robust Estimation methods of Generalized Exponential Distribution with Outlier”. Pakistan journal of statistic and oper.res., (16)3, pp. 545-559.
3. Casella, G., Fienberg, S., Oklin, I. (2007). “The Bayesian Choice”. Springer Series in Statistics, Second Edition.
4. Devroye, L. (1986), “Non-uniform Random Variate Generation”, Springer, New York.
5. Gupta, R., Kundu, D. (2001). “Generalized exponential distributions: different methods of estimation”. Journal of Statistical Computer and Simulation, (69), p.p.315–338.
6. Hamza, Z., Jassim, F., Asaedi, H. (2023).” Estimating systems reliability functions for the generalized exponential distribution with application”. Periodicals of Engineering and Natural Sciences, 11(3) 3, p.p.108-114.
7. Khaleel. A., Khlefha, A. (2021). “Reliability of (1+1) Cascade Model for Weibull Distribution”. Highlights in Science, 1, p.p.1-4.
8. Kundu, D., Gupta, R. (2007). “Generalized exponential distribution: Bayesian estimations”. Computational Statistics & Data Analysis, 52(4), p.p.1873-1883.
9. Mutkekar R., Munoli S. (2016). “Estimation of Reliability for Stress-Strength Cascade Model”. Open Journal of Statistics, 6(5), p.p. 873-881.
10. Naqash,S, Ahmad, P., Ahmed, A. (2016). “Bayesian Analysis of Generalized Exponential Distribution”. Journal of Modern Applied Statistical Methods, (15)2, p.p.656-670.
11. Pandit S., Srivastav G. (1978). “Studies in Cascade Reliability II”. IEEE Reliability. 27(2), 166-168.
12. Raghava, C., et al. (1987). “The Reliability of a Cascade system with Normal Stress and Strength distribution”, ASR, 2(2), pp. 49-54.
13. Suess, E., Trumbo, B. (2010). “Introduction to Probability Simulation and Gibbs Sampling with R”. Springer Science, New York.
14. UmaMaheswar, T., Swathi, N. (2013). “Cascade Reliability for Generalized Exponential Distribution”. International Journal of Computational Engineering Research. 3(1), p.p.132-136.

Comparison between Bayesian and maximum potential methods for estimating the cascade system reliability function for the generalized exponential distribution

L. Firas Munther Jassim / Al-Mustansiriya University / College of Administration and Economics / firasm@uomustansiriyah.edu.iq

Abstract :

This study dealt with estimating the reliability function of the cascade system (1 + 1) using the Bayesian and maximum potential methods, when the stress and strength variables follow the normalized exponential distribution. Various simulation experiments were conducted to find these capabilities and compare them. The simulation results demonstrated the superiority of the Bayesian method in the case of small and medium sample sizes, and the superiority of the maximum likelihood method in the case of large sample sizes, and that the values of the cascade reliability functions (1+1) for the generalized exponential distribution increase with increasing the value of the shape parameter of the durability variable, and decrease with increasing the value of the shape parameter. for the stress variable, as well as increasing the accuracy of the estimate when increasing the value of the measurement parameter of the normalized exponential distribution.

Keywords : reliability of the cascade system (1+1), normalized exponential distribution, Gypsum sampling.

****

****

****