

طرائق تقدير معلمات توزيع بواسون الاسي مع تطبيق عملي

م. علي محمد علي جيجان / الجامعة التقنية الوسطى / معهد الادارة الرصافة alimohammed520@mtu.edu.iq
م.م. لؤي عادل عبد الجبار / وزارة التعليم العالي والبحث العلمي luay.yahya1989@gmail.com
م.م. مصطفى علي فخري / جامعة ابن سينا للعلوم الطبية والصيدلانية mustafa.ali@ibnsina.edu.iq

P: ISSN : 1813-6729

E : ISSN : 2707-1359

<https://doi.org/10.31272/jae.i134.1211>

مقبول للنشر بتاريخ : 2022/8/10

تاريخ استلام البحث : 2022/7/25

المستخلص :

في هذا البحث سوف نقوم بتقدير معلمات توزيع بواسون الاسي ذات المعلمتين (θ, λ) بعدة طرائق تقدير وهي (طريقة الامكان الاعظم MLE ، طريقة مقدرات العزوم ME ، طريقة المربعات الصغرى LSE ، طريقة المقدرات المئوية PCE ، طريقة Cramér-von Mises (CME) و طريقة أندرسون دارلينج ((ADE).

وتم استخدام بيانات حقيقية والخاصة بمرض فقر الدم لدى الاطفال وبحجم عينة (60) وللمقارنة بين هذه الطرائق تم استخدام معيار المقارنة متوسط مربعات الخطأ (MSE) وظهرت النتائج ان افضل طريقة هي طريقة اندرسون دارلينج .

كلمات مفتاحية :

توزيع بواسون الاسي ، المقدرات المئوية ، طريقة كرامر فون ميزس ، و طريقة أندرسون دارلينج .



مجلة الادارة والاقتصاد

مجلد 47 / العدد 134 / ايلول / 2022

الصفحات : 192 - 199

1- المقدمة :

Introduction
يعد توزيع بواسون الاسي (PED) من التوزيعات المهمة والذي يوفر حلاً بسيطاً وقريباً للعديد من المشكلات في الاختبارات الحياتية عن طريق دراسات ذات مصداقية عالية ، حيث تم استخدام في هذا البحث ست طرائق لتقدير معلمات التوزيع ، أذ ان التوزيع يحتوي على معلمتين (θ, λ) المعلمة الاولى λ تمثل معلمة القياس و θ معلمة الشكل .

2- هدف البحث :-

purpose of research
ان الهدف من هذا البحث هو تقدير معلمات توزيع بواسون الاسي بأستخدام طرائق مختلفة للبحث عن افضل طريقة تقدير لمعلمات هذا التوزيع من خلال تطبيقها على بيانات حقيقية والخاصة بمرض فقر الدم لدى الاطفال .

3- الجانب النظري

1-3 توزيع بواسون الاسي (PED) : The Poisson-exponential distribution

لنفترض ان (X) يمثل متغير عشوائي غير سالب يشير الى hemoglobin values ، حيث ان المتغير العشوائي لتوزيع بواسون الاسي (PED) مع معلمات $\theta > 0$ و $\lambda > 0$ لدالة الكثافة الاحتمالية تعطى بالصيغة الاتية ، [3] ، [7] :

$$F(x/\theta, \lambda) = \frac{\theta \lambda e^{-\lambda x - \theta e^{-\lambda x}}}{1 - e^{-\theta}} , \quad x > 0 \quad \text{..... (1)}$$

اذ تمثل المعلمة (λ) مقياس التوزيع والمعلمة (θ) تمثل شكل التوزيع مع اقتراب المعلمة (θ) الى الصفر ، ويتقارب توزيع بواسون الاسي (PED) الى توزيع الاسي (ED) من خلال المعلمة (λ) .

ويتم الحصول على المتوسط والتباين للتوزيع PED عن طريق الصيغ الاتية :

$$E(x) = \frac{\theta}{\lambda(1 - e^{-\theta})} F_{2,2}([1, 1], [2, 2], -\theta) \quad \text{..... (2)}$$

$$\text{Var}(x) =$$

$$\frac{\theta}{\lambda^2(1 - e^{-\theta})} \left[F_{3,3}([1, 1, 1], [2, 2, 2], -\theta) - \left(\frac{\theta}{(1 - e^{-\theta})} F_2^2([1, 1], [2, 2], \theta) \right) \right] \quad \text{..... (3)}$$

وتمثل $F_{p,q}(a, b, \theta)$ (generalized hypergeometric function) الدالة فوق الهندسية المعممة

حيث يتم اعطاء دالة التوزيع التراكمي لـ (X) بواسطة الصيغة الاتية ، [2] :

$$F(x, \theta, \lambda) = \frac{1 - e^{\theta - \theta e^{-\lambda x}}}{1 - e^{-\theta}} \quad \text{..... (4)}$$

والعزوم الاولى لـ (X) حول نقطة الاصل تعطى بالصيغة الاتية :

$$E(X^r / \theta, \lambda) = \frac{\theta \gamma(r+1)}{\lambda^r(1 - e^{-\theta})} F_{r+1,r+1}([1, \dots, 1], [2, \dots, 2], -\theta) \quad \text{... (5)}$$

ومن الجدير بالملاحظة ان توزيع بواسون الاسي PED في المعادلة رقم (1) يمكن ان يأخذ القيمة $(x=0)$ في هذه الحالة تصبح الصيغة كما يلي ، [3] ، [7] :

$$F(0, \theta, \lambda) = \frac{\theta \lambda}{e^{\theta} - 1} \quad \text{..... (6)}$$

حيث ان $F(0, \theta, \lambda) \geq 0$ لكل من $\theta > 0$ و $\lambda > 0$.

اذ يكون توزيع PED بديلاً بسيطاً لاستخدامه في المشكلات المتعلقة بحدوث قيمة صفرية

وفيما يلي الطرائق المستخدمة لتقدير معلمات توزيع بواسون الاسي PED

2-3 طريقة الامكان الاعظم (MLE) : maximum likelihood method

في الاستدلال الإحصائي ، تُستخدم طريقة الامكان الاعظم على نطاق واسع للحصول على تقديرات المعلمات، حيث يمكن الحصول على MLE بسهولة عن طريق تعظيم دالة الاحتمالية فيما يتعلق بالمعلمات المراد تقديرها وهذا الإجراء له خصائص جيدة مثل

الاتساق والكفاءة المقاربة والتباين الطبيعي حيث يمكننا بسهولة بناء دالة الاحتمال لمشاكل مختلفة.

بافتراض ان $n_1, n_2, \dots, n_k$ عينة عشوائية من حجم (k) $PE(\theta, \lambda)$ ودالة الامكان الاعظم تعطى بالصيغة الآتية ، [2] ، [3] :

$$L(\theta, \lambda/x) = \left(\frac{\theta \lambda}{1 - e^{-\theta}} \right)^n \exp \left\{ -\lambda \sum_{i=1}^n x_i - \theta \sum_{i=1}^n e^{-\lambda x_i} \right\} \dots \dots (7)$$

وبادخال (log) على دالة الامكان الاعظم بالمعادلة (7) وكما يلي :

$$\gamma(\theta, \lambda; x) = n \log(\theta \lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i - \theta \sum_{i=1}^n e^{-\lambda x_i} - n \log(1 - e^{-\theta}) \dots (8)$$

$$\frac{\gamma(\theta, \lambda; x)}{\delta \theta} = \frac{n}{\theta} - \frac{n}{e^{\theta} - 1} - \sum_{i=1}^n e^{-\lambda x_i} = 0 \dots \dots (9)$$

$$\frac{\gamma(\theta, \lambda; x)}{\delta \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i + \theta \sum_{i=1}^n x_i e^{-\lambda x_i} = 0 \dots \dots (10)$$

Moments estimators method

طريقة مقدرات العزوم (ME) :

3-3

طريقة العزوم هي إجراء بسيط لتقدير توزيعات احتمالية المعالم غير المعروفة ، في ظل افتراضات ضعيفة للغاية ، ينتج عن هذه الطريقة تقديرات متنسقة.

ويمكن الحصول على مقدرات العزوم لتوزيع كما يلي ، [1] ، [4] :

حيث ان $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ و $\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$ وهي عزوم العينة .

$$E(X/\theta, \lambda) = \frac{\theta F_{2,2}([1,1], [2,2]), -\theta)}{\lambda(1 - e^{-\theta})} \dots (11)$$

$$E(X^2/\theta, \lambda) = \frac{2\theta F_{2,2}([1,1,1], [2,2,2]), -\theta)}{\lambda^2(1 - e^{-\theta})} \dots (12)$$

وبعد إجراء بعض المعالجات الجبرية ، يمكن الحصول على مقدر العزوم $\hat{\theta}_{ME}$ لـ θ عن طريق حل المعادلة غير الخطية وكما يلي [10] .

$$\frac{2\bar{x}(1 - e^{-\hat{\theta}})F_{3,3}([1,1,1], [2,2,2]), -\hat{\theta}}{\hat{\theta}F_{2,2}([1,1], [2,2]), -\hat{\theta})^2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \dots (13)$$

أذ ان $\hat{\lambda}_{ME}$ لـ λ يمكن استبدالها بـ $\hat{\theta}_{ME}$

$$\hat{\lambda}_{ME} = \frac{\hat{\theta}}{\bar{x}(1 - e^{-\hat{\theta}})} F_{2,2}([1,1], [2,2]), -\hat{\theta}) \dots (14)$$

Least square method

طريقة المربعات الصغرى (LSE) :

4-3

الفكرة البسيطة من المقدرات العادية للمربعات الصغرى والمربعات الصغرى الموزونة هي إيجاد المسافة الدنيا بين التوزيع التراكمي التجريبي والتوزيع التراكمي النظري.

نفترض أن $F(X)$ تكون دالة توزيع المتغيرات العشوائية

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ و $X(1) < X(2) < \dots < X(n)$ حيث يتم ترتيب المتغيرات

العشوائية ويتم الحصول على تقديرات المربعات الصغرى ، المشار إليها بواسطة $\hat{\theta}_{LSE}$

و $\hat{\lambda}_{LSE}$ من خلال تقليل الخطأ اقل ما يمكن ، [2] ، [10] :

$$S(\theta, \lambda) = \sum_{i=1}^n \left[F(x_{i:n} / \theta, \lambda) - \frac{i}{n+1} \right]^2 = 0 \dots (15)$$

فيما يتعلق بـ θ و λ حيث دالة F تعطى بالصيغة الآتية [4] :

$$F(x, \lambda) = \frac{1 - e^{-\theta - \theta e^{-\lambda x}}}{1 - e^{-\theta}} \dots (16)$$

ويمكن الحصول عليها عن طريق حل المعادلات الآتية :

$$\sum_{i=1}^n \left[F(x_{i:n} / \theta, \lambda) - \frac{i}{n+1} \right] \mu_1(x_{i:1} / \theta, \lambda) = 0 \quad \dots (17)$$

$$\sum_{i=1}^n \left[F(x_{i:n} / \theta, \lambda) - \frac{i}{n+1} \right] \mu_2(x_{i:1} / \theta, \lambda) = 0 \quad \dots (18)$$

اذ ان

$$\mu_1(x_{i:n} / \theta, \lambda) = \frac{e^{-\theta} e^{-\lambda x_{i:n}} - \lambda x_{i:n} e^{-\theta} e^{-\lambda x_{i:n}} + \theta e^{-\lambda x_{i:n}} - e^{\theta+1}}{(e^{\theta}-1)^2} \quad \dots (19)$$

$$\eta_2(x_{i:n} / \theta, \lambda) = \frac{x \theta e^{\theta(-e^{-\lambda x}) - \lambda x + \theta}}{(e^{\theta}-1)} \quad \dots (20)$$

يمكن الحصول على تقديرات المربعات الصغرى الموزونة (WLSE) ، $\hat{\theta}_{wls}$ و $\hat{\lambda}_{wls}$ من خلال تقليل الخطأ اقل ما يمكن وكما يلي ، [2] ، [4] .

$$W(\theta, \lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left[F(x_{i:n} / \theta, \lambda) - \frac{i}{n+1} \right]^2 \quad \dots (21)$$

حيث يمكن أيضاً الحصول على هذه التقديرات عن طريق حل المعادلات الآتية :

$$\sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left[F(x_{i:n} / \theta, \lambda) - \frac{i}{n+1} \right] \eta_1(x_{i:n} / \theta, \lambda) = 0 \quad \dots (22)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left[F(x_{i:n} / \theta, \lambda) - \frac{i}{n+1} \right] \eta_2(x_{i:n} / \theta, \lambda) = 0 \quad \dots (23)$$

5-3 طريقة المقدرات المئوية (PCE) : Percentile estimators method

المقدر المئوي (PCE) هو طريقة للاستدلال الإحصائي اقترحها كاو في الأصل [8,9] تُستخدم هذه الطريقة بشكل أساسي عندما يكون لبعض توزيعات الاحتمالات دالة رابعة في تعبير مغلق الشكل.

بالنسبة لهذه الطريقة ، يتم حساب المسافة بين قيم العينة المرتبة والقيم النظرية المرتبة من خلال الدالة الرابعة ، [5] ، [6] . اذ ان :

$$F(x, \lambda) = \frac{1 - e^{\theta - \theta e^{-\lambda x}}}{1 - e^{-\theta}} \quad \dots (24)$$

حيث يتم إعطاء الدالة الكمية بواسطة

$$x_p = \frac{\log(\theta) - \log(-\log(p - e^{-\theta}(p - 1)))}{\lambda} \quad \dots (25)$$

لنفترض أن $X_{(j)}$ هي الإحصاء من الدرجة j ، أي $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$. إذا كانت P_j تشير إلى بعض مقدرات $F(x_{i:n} / \theta, \lambda)$ ، فيمكن الحصول على تقديرات θ و λ .

$$\sum_{j=1}^n \left(x_{(j)} - \frac{\log(\theta) - \log(-\log(p - e^{-\theta}(p - 1)))}{\lambda} \right)^2 \quad \dots (26)$$

فيما يتعلق ب θ و λ . يمكن الحصول على التقديرات المئوية $\hat{\theta}_{PCE}$ و $\hat{\lambda}_{PCE}$ من خلال حل المعادلات غير الخطية الآتية ، [5] ، [6] :

$$\frac{1}{\lambda^2} \sum_{l=1}^n \left[x_{(j)} - \frac{\log(\theta) - \log(-\log(p - e^{-\theta}(p-1)))}{\lambda} \right] \psi_1\left(\frac{P_j}{\theta}\right) = 0 \quad \dots (27)$$

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{l=1}^n \left[x_{(j)} - \frac{\log(\theta) - \log(-\log(p - e^{-\theta}(p-1)))}{\lambda} \right] \psi_2\left(\frac{P_j}{\theta}\right) = 0 \quad \dots (28)$$

اذ ان

$$\psi_1\left(\frac{P_j}{\theta}\right) = \log(\theta) - \log(-\log(p - e^{-\theta}(p-1))) \quad \dots (29)$$

$$\psi_2\left(\frac{P_j}{\theta}\right) = \left(\frac{P_j - 1}{(P_j e^{\theta} - P_j + 1) \log(P_j - (P_j - 1)e^{-\theta})} - \frac{1}{\theta} \right) \quad \dots (30)$$

6-3 طريقة Cramér-von Mises (CME) :

قدم الباحث MacDonald دليلاً تجريبياً على أن المقدّر المتحيز يكون أصغر من مقدرات الحدود الدنيا الأخرى ، حيث ان مقدرات (CME) $\hat{\theta}_{CME}$ و $\hat{\lambda}_{CME}$ للمعلمتين θ و λ يمكن الحصول عليها عن طريق تصغير الدالة ادناه ، [5] ، [10].

$$C(\theta, \lambda) = \frac{1}{12n} + \sum_{l=1}^n \left[F(x_{i:n} / \theta, \lambda) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2 \quad \dots (31)$$

حيث ان هذه التقديرات يمكن الحصول عليها عن طريق حل هذه المعادلات الغير خطية .

$$\sum_{l=1}^n \left[F(x_{i:n} / \theta, \lambda) - \frac{2i-1}{2n} \right] \mu_1(x_{i:1} / \theta, \lambda) = 0 \quad \dots (32)$$

$$\sum_{l=1}^n \left[F(x_{i:n} / \theta, \lambda) - \frac{2i-1}{2n} \right] \mu_2(x_{i:1} / \theta, \lambda) = 0 \quad \dots (33)$$

Anderson Darling

7-3 طريقة أندرسون دارلينج (ADE) :

يتم الحصول على تقديرات هذه الطريقة $\hat{\theta}_{ADE}$ و $\hat{\lambda}_{ADE}$ للمعلمتين θ و λ عن طريق تصغير الدالة اقل ما يمكن وكما يلي ، [5] ، [10]:

$$A(\theta, \lambda) = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \{ \log F(x_{i:n} / \theta, \lambda) + \log \bar{F}(x_{n+1-i:n} / \theta, \lambda) \} \quad \dots (34)$$

ويمكن أيضاً الحصول على هذه التقديرات من خلال حل المعادلات غير الخطية وكما يلي :

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) \left[\frac{\mu_1(x_{i:1} / \theta, \lambda)}{F(x_{i:1} / \theta, \lambda)} - \frac{\mu_1(x_{n+1-i:n} / \theta, \lambda)}{\bar{F}(x_{n+1-i:n} / \theta, \lambda)} \right] = 0 \quad \dots (35)$$

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) \left[\frac{\mu_2(x_{i:1}/\theta, \lambda)}{F(x_{i:1}/\theta, \lambda)} - \frac{\mu_2(x_{n+1-i:n}/\theta, \lambda)}{\bar{F}(x_{n+1-i:n}/\theta, \lambda)} \right] = 0 \dots (36)$$

4- الجانب التطبيقي :

1-4 وصف البيانات :

تم الحصول على بيانات حقيقية عن مرض فقر الدم لدى الاطفال من مستشفى الطفل المركزي التعليمي / بغداد الاسكان لـ (60) طفل مصاب بهذا المرض ، اذ تمثل البيانات ادناه نسبة خلايا الدم الحمراء (خلايا الهيموغلوبين) لدى الاطفال وكانت البيانات كمايلي:
الجدول رقم (1) يبين البيانات الحقيقية للاطفال المصابين بمرض فقر الدم

8.77	9.30	9.28	7.15	7.77	9.02	7.75	9.88	5.58	6.59	10.14	5.70	10.99	5.64	10.48
6.09	6.47	5.91	6.67	8.47	6.53	5.50	6.48	6.85	7.47	7.44	10.57	6.23	6.26	10.66
5.96	5.23	10.44	8.47	9.27	8.86	10.43	7.13	10.13	9.58	8.25	9.95	8.08	8.47	6.85
8.77	7.34	7.42	9.79	10.86	6.80	8.48	9.67	6.19	8.01	9.83	7.58	7.62	8.03	10.38

2-4 تقدير معلمات التوزيع :

في هذا الجزء سوف يتم تقدير معلمات توزيع بواسون الاسي (PED) باستخدام الطرائق الموضحة في الجانب النظري ، نلاحظ ان الطرائق المستخدمة ان درجة الخطية عالية جداً في تقدير المعلمات ولا يمكن حلها الا باستخدام الطرق العددية وسوف نستخدم في هذا البحث طريقة نيوتن رافسون لتقدير معلمات التوزيع ، وكذلك سوف نستخدم متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمقارنة بين الطرائق المستخدمة ولأجل ذلك قام الباحث بكتابة برنامج باستخدام برنامج (R) .

الجدول رقم (2) يبين تقدير معلمات التوزيع ومتوسط مربعات الخطأ

methods	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	MSE
MLE	0.72	0.31	0.63
ME	2.56	1.72	0.93
LSE	1.62	0.93	0.82
PCE	0.53	0.21	0.34
CME	0.83	0.16	0.52
ADE	0.12	0.08	0.29

نلاحظ من الجدول اعلاه ان افضل طريقة هي طريقة ADE تليها طريقة PCE من خلال معيار المقارنة MSE وان الانموذج الرياضي بعد تقدير المعلمات كما يلي

$$F(x/\theta, \lambda) = \frac{0.12 (0.08) e^{-0.08x-0.12} e^{-0.08x}}{1-e^{-0.12}} \dots (37)$$

5- الاستنتاجات والتوصيات

1-5 الاستنتاجات :

- 1- نلاحظ من الجدول رقم (2) بان افضل طريقة هي طريقة ADE .
- 2- طريقة PCE جاءت بالمرتبة الثانية حسب معيار المقارنة .
- 3- ان اسوء طريقة لتقدير معلمات التوزيع كانت طريقة ME .

2-5 التوصيات

- 1- نوصي باستخدام طريقة ADE لتقدير معلمات التوزيع لانها اعطت اقل متوسط مربعات الخطأ
- 2- نوصي باستخدام اسلوب المحاكاة للمقارنة بين الطرائق المستخدمة .
- 3- نوصي باستخدام طريقة بيز لتقدير معلمات التوزيع .

6 المصادر :

- 1- Alkasasbeh, M. R., & Raqab, M. Z. (2009), "Estimation of the generalized logistic distribution parameters", Comparative study. *Statistical Methodology*, 6(3), 262-279.

- 2- Bagheri, S. F., Alizadeh, M., Baloui Jamkhaneh, E., & Nadarajah, S. (2014), "Evaluation and comparison of estimations in the generalized exponential-Poisson distribution" , *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84(11), 2345-2360.
- 3- Cancho, V. G., Louzada-Neto, F., & Barriga, G. D. (2011), "The Poisson-exponential lifetime distribution" , *Computational Statistics & Data Analysis*, 55(1), 677-686.
- 4- Gupta, R. D., & Kundu, D. (2001), "Generalized exponential distribution: different method of estimations", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 69(4), 315-337.
- 5- Kao, J.H.(1958), "Computer methods for estimating Weibull parameters in reliability studies", *IRE Transactions on Reliability and Quality Control*, 15-22
- 6- Kao, J. H. (1959), "A graphical estimation of mixed Weibull parameters in life-testing of electron tubes", *Technometrics*, 1(4), 389-407.
- 7- Louzada-Neto, F., Cancho, V. G., & Barriga, G. D. (2011), "The Poisson-exponential distribution: a Bayesian approach" , *Journal of Applied Statistics*, 38(6), 1239-1248.
- 8- Luceño, A. (2006), "Fitting the generalized Pareto distribution to data using maximum goodness-of-fit estimators" , *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(2), 904-917.
- 9- Macdonald, P. D. M. (1971) , "Comments and queries comment on an estimation procedure for mixtures of distributions" , by choi and bulgren. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 33(2), 326-329.
- 10- Rodrigues, G. C., Louzada, F., & Ramos, P. L. (2018), "Poisson-exponential distribution: different methods of estimation" , *Journal of Applied Statistics*, 45(1), 128-144.

Methods for estimating the parameters of the Poisson exponential distribution with practical application

L. Ali Muhammad Ali Jigan / Central Technical University / Rusafa Administration Institute / alimohammed520@mtu.edu.iq

A. L. Luay Adel Abdul-Jabbar / Ministry of Higher Education and Scientific Research / luay.yahya1989@gmail.com

A. L. Mustafa Ali Fakhri / Ibn Sina University of Medical and Pharmaceutical Sciences / mustafa.ali@ibnsina.edu.iq

Abstract:

In this paper, we will estimate the parameters of the Poisson exponential distribution with two parameters (θ, λ) by several estimation methods which are (the MLE method, ME moments estimators method, LSE least squares method, PCE method, CME method) Cramér–von Mises And the Anderson-Darling method (ADE). Real data related to anemia in children were used with a sample size of (60). To compare these methods, the mean of squared error (MSE) was used, and the results showed that the best method is Anderson Darling's method.

Keywords: Poisson exponential distribution , estimators , Kramer von Mises method , and Anderson-Darling method .

