

النماذج الوبائية ذو منظومة المعادلات التفاضلية المتعددة

أ.م.د. رواء صالح محمد
الجامعة المستنصرية/كلية الإدارة والاقتصاد

أ.م.د. سهاد علي شهيد التميمي
الجامعة المستنصرية/كلية الإدارة والاقتصاد

P: ISSN : 1813-6729

<http://doi.org/10.31272/JAE.43.2020.126.A1>

E : ISSN : 2707-1359

المستخلص :

لطالما كانت الاوبئة مصدر قلق كبير للجنس البشري فقد شكل انتشار الموت الاسود في اوربا في القرن الرابع عشر بحوالي ثلث سكان اوربا في ذلك الوقت وكذلك وباء الحمى الصفراء في الولايات المتحدة 1793 . أن الاحداث الاخيرة المتمثلة ب Covid-19 تذكرنا بأن الاوبئة تمثل مشكلة حقيقية للمؤسسات الصحية التي تواجه باستمرار الامراض الناشئة. وفي ضوء ماسبق تكمن اهمية المقالة في استعمال نماذج الاوبئة والتنبيؤ بالسلوك القياسي لانتشار العدوى بين السكان ، وعليه فان النماذج الوبائية تجيب على التساؤلات في حال أننا بدأنا بعينة في مجتمع معرضين للإصابة بضمنهم عدد محدود من المصابين بمرض معدي ، هل سيزداد عدد المصابين بسبب المرض المعدي بشكل ملحوظ ، مما يؤدي إلى حدوث وباء ؟ ، أم أن المرض سيتلاشى بدون انتشار ؟ وبافتراض حدوث وباء وكيف سينتهي؟ هل سيبقى اشخاص معرضين للإصابة بالمرض المعدي عند انتهاء ذلك الوباء ؟ وإلى متى سيستمر الوباء؟

1-المقدمة (Introduction)

على الرغم من توفر اللقاحات للعديد من الامراض المعدية الا أن هذه الامراض تسبب المعاناة والوفيات في العالم وخاصة في الدول النامية . اما في البلدان المتقدمة فقد حضيت الامراض المزمنة مثل السرطان وامراض القلب بأهتمام اكبر من الامراض المعدية . الا ان الامراض المعدية لاتزال سبب شائع للوفاة في العالم . تعد نمذجة ردود الفعل البشرية على انتشار الامراض المعدية موضوعا مهما في علم الاوبئة الحالي وقد اجتذب مؤخرا اهتماما كبيرا . ومن اهم الامراض التي كانت نتيجة لهذا الاهتمام انتشار فيروس كورونا وهو عضو تم تحديده حديثاً في عائلة الفايروسات التاجية، بدأ مرض فيروس كورونا المعدي القاتل في ديسمبر 2019 واكتشفت حاله الاولى في مدينة ووهان في الصين ، وقد أدى تطور هذا الفايروس الى حدوث أزمة عالمية وغيّر حياة المليارات من البشر .

وكذلك الحال بالنسبة لفايروس متلازمة نقص المناعة المكتسب (H I V) الايدز ، اذ يعد مرضا معديا مهما في البلدان النامية والمتقدمة .وان العديد من العلوم تستمر على اجراء تجارب للحصول على المعلومات واختبار الفرضيات ، وغالبا ماتكون تلك التجارب بين البشر مستحيلة أو مكلفة أو غير اخلاقية . ومن هنا يأتي دور الاحصاء وتطبيقاته في هذا المجال لتقديم دراسة تفسيرية لهذه الامراض وذلك بتوظيف نموذج مناسب يحاكي بيانات الامراض المعدية، والذي يفترض أن جميع افراد المجتمع معرضون بشكل متساوي للإصابة بالمرض . وأن المناعة الكاملة تمنح بعد الإصابة بالمرض .



مجلة الإدارة والاقتصاد
العدد 126 / كانون الاول / 2020
الصفحات : 358 - 362

2- مفهوم النمذجة الوبائية : The Concept of epidemiological model

يوجد العديد من النماذج الاساسية ذات المعادلات التفاضلية المحددة Deterministic differential equation Models للامراض المعدية (الاوبئة) والتي تنتشر عن طريق الاتصال المباشر من شخص الى اخر بين السكان . تتم صياغة تلك النماذج البسيطة كمشاكل لقيم اولية لمنظومة المعادلات التفاضلية ويتم تحليلها رياضيا . وتختلف من حيث التسميات بحسب نوع الاوبئة والمعطيات والبيانات المسلط عليها البحث العلمي. اذ تقدر المعلمات لمختلف الامراض (الاوبئة) وتستخدم للمقارنة بين مستويات التطعيم (اللقاحات) اللازمة لمناخ العينة المبحوثة من هذه الامراض (الايوبئة). ان النماذج الاساسية ثلاثة تنفرع منها نماذج اخرى والتي سيتم استعراضها وفق نوع الوباء المدروس اذ ستوفر استنادا للتحليل ملاحظات ومفاهيم ، واساساً يستند عليه في نماذج اكثر دقة.

3- توفير البيانات : Collect the Data

أن بيانات الاوبئة تتوفر او تحدث احيانا بشكل طبيعي نتيجة للامراض المزمنة . ومع ذلك ، غالباً ماتكون البيانات غير كاملة نتيجة نقص التسجيل وهذا النقص يؤدي الى ان تقدير المعلمات بشكل دقيق امرأ صعباً اذ يتم تقدير بعض المعلمات لمجموعه من القيم . نتيجة لذلك يمكن استخدام النماذج الرياضية والمحاكاة الحاسوبية لاجراء التجارب النظرية المطلوبة ، وتوفير قيم المعلمات لمجموعه من البيانات بسهولة .

4- الانموذج الرياضي Mathematical Models

أن الانموذج الرياضي له حدود وامكانيات يجب ان تحدد ، واي من النماذج المدروسة يمكن أن تجيب على الاسئلة الخاصة بمشكلة الدراسة كما أن مصمم النموذج يمكن ان يجد التركيبة المناسبة للبيانات المتاحة . اذا كما هو معروف فإن المرض يسمى وباء (epidemic) اذا انتشر في المجتمع ، ولا يقتصر المرض المعدى الى العوامل المرتبطة بالامراض مثل العامل المعدى ، طريقة الانتقال ، فترة العدوى ، فترة الاصابة ، درجة الحساسية ومدى المقاومة ، ولن تعتمد ايضا على العوامل الاجتماعية والثقافية ، الديمغرافية ،الاقتصادية ، الجغرافية . وعليه فان المتغيرات الاساسية التي تحدد حالة السكان في المنظور الوبائي هي :

S_t : عدد الافراد الذين يمكن ان يصابوا بالعدوى ولكنهم غير مصابين بعد عند الوقت t .

I_t : عدد الافراد الذين اصيبوا بالعدوى ويكونون قادرين على نقل المرض للاخرين عند الوقت t .

R_t : عدد الافراد الذين تعافوا من المرض واكتسبوا مناعه أو الذين توفوا جراء العدوى عند الوقت t .

5- النماذج الوبائية epidemiological models

5-1 : إنموذج SIS

وهو نموذج خاص بالامراض التي لاتمنح المناعه (الحصانة) immunity عند الاصابة بها ، ويطلق عليه S I S وذلك لانه الافراد ينضمون للفئه المعرضة للاصابة مرة اخرى عندما يتعافون من العدوى . ويتم تضمين الولادات والوفيات التي تحدث بشكل طبيعي (الديناميكية الحياتية) ، ويكون السلوك متشابه في حالة عدم وجود الديناميكية الحياتية . مشكلة القيمة الاولية (IVP) للنموذج SIS تمت صياغتها استنادا لحجم المجتمع كالاتي :

$$(N S_t)' = -\lambda SNI + \gamma NI + \mu N - \mu NS$$

$$(N I_t)' = \lambda SNI - \gamma NI - \mu NI \quad \dots\dots\dots 1$$

$$N S_{(t=0)} = NS_0 > 0 \quad , \quad NI_{(t=0)} = NI_0 > 0$$

$$N S_t + N I_t = N$$

μ : ثابت معدل الوفيات وهية قيمه موجبة .

$\lambda(t)$: معدل العدوى خلال الزمن t . (تسمى ايضا قوة العدوى) . وهو عدد اولي موجب تشير الى المشتقات بوجود الزمن t

$\gamma(t)$: معدل الازاله خلال الزمن t .

في حال تقسيم كل معادلة اعلاه على حجم السكان N فإن (IVP) تصبح كالاتي :

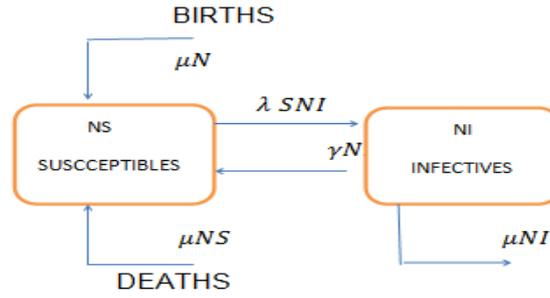
$$S_t' = -\lambda SI + \gamma I + \mu - \mu S$$

$$I_t' = \lambda SI - \gamma I - \mu I$$

$$S_{(t=0)} = S_0 > 0 \quad , \quad I_{(t=0)} = I_0 > 0 \quad \dots(2)$$

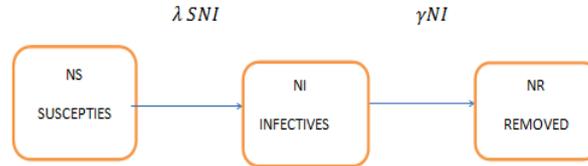
$$S_t + I_t = 1$$

نلاحظ من المعادلة (2) أن IVP يتضمن معدلات الاتصال (التلامس) والمستبعدين اليومية ولكن ليس حجم السكان N . النموذج SIS يتلائم مع بعض امراض البكتريا مثل السيلان والتهاب السحايا والتهاب الحلق العقدي . حيث تكون جميع المعلمات غير سالبة في المعادلة 2 لان النتائج السلبية لاتعد لها أهمية وبائية .



مخطط (1) يمثل النموذج SIS

5-2: إنموذج SIR بدون الديناميكية الحياتية : The SIR Model without Vital Dynamics
 يعد انموذج SIR من النماذج الكلاسيكية لنماذج الاوبئة ويقوم بتقسيم السكان قيد الدراسة الى فئات منفصلة تتغير بمرور الزمن ويفترض أن جميع افراد المجتمع معرضون بشكل متساوي للاصابة بالمرض ، وان المناعة الكاملة تمنح بعد الاصابة . ويدرس الانموذج الامراض التي تمنح مناعة دائمة بعد الاصابة بالعدوى . وعندما يمر SIR بمجموعة سكانية في وقت قصير نسبيا (سنة او اقل) . عندها يسمى هذا المرض وباء epidemic . ونتيجة أن المرض يحدث بسرعة نسبيا ، فإن النموذج لايشمل المواليد والوفيات (الديناميكية الحياتية) اما الاوبئة الشائعة مثل الاقلونزا والحصبة الالمانية وجذري الماء .



مخطط (2) يمثل النموذج SIR

مشكلة القيمة الاولى (IVP) للنموذج بدون الديناميكية الحياتية هي :

$$\begin{aligned} (N S(t))' &= -\lambda SNI \\ (N I(t))' &= \lambda SNI - \gamma NI \\ (N R(t))' &= \gamma NI \quad \dots(3) \\ N S(t=0) &= NS_0 > 0, \quad NI(t=0) = NI_0 > 0 \\ N R(t=0) &= NR_0 \geq 0 \end{aligned}$$

اذ أن λ, γ هي ثوابت موجبة . وعند قسمة كل معادلة في (3) على حجم المجتمع ، ويتم توصيف الانموذج البسيط SIR من خلال النظام التالي ، الذي يشمل الفئات الوبائية الثلاثة المذكوره اعلاه:

$$\begin{aligned} \dot{S}_t &= -\lambda(t)S(t)I(t) \\ \dot{I}_t &= \lambda(t)S(t)I(t) - \gamma(t)I(t) \quad \dots(4) \\ \dot{R}_t &= \gamma(t)I(t) \end{aligned}$$

نلاحظ النظام لديه حل وحيد وموجب وعلو على ذلك عند جمع المعادلات نحصل على

$$\dot{S}_t + \dot{I}_t + \dot{R}_t = 0$$

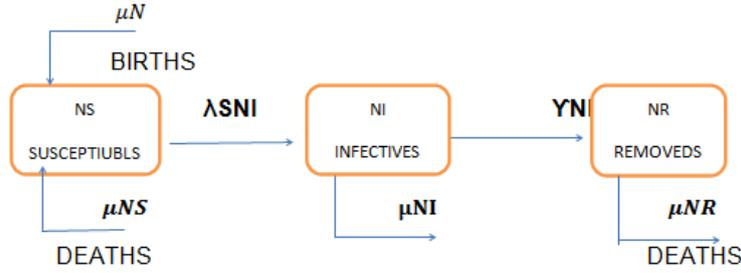
بحيث يكون اجمالي عدد السكان ثابتاً.

$$S_t + I_t + R_t = N$$

ان المنطقه المقبولة الوبائية عند المستوى SI يستند على الفترة الزمنية .

$$T = \{(S, I) | S \geq 0, S + I \leq 1\}$$

5-3: إنموذج SIR بوجود الديناميكية الحياتية : The SIR Model with Vital Dynamics
 النموذج الوبائي SIR تم التطرق له في الفقرة السابقة لكن الفرق هنا هو ان نقوم بنمذجة سلوك المرض لدى السكان على فترات زمنية طويلة . ويطلق على تلك الامراض بالمزمنة (endemic) في حال وجودها بالمجتمع لاكثر من 10 الى 20 عاماً . وبسبب تلك الفترة الطويلة يجب ان يتضمن النموذج على المواليد كمصدر لحالات تعرض جديدة للاصابة والوفيات الطبيعية في كل فنه .



مخطط (3) يمثل SIR بوجود الديناميكية الحياتية

مشكلة القيمة الاولى (IVP) لنموذج SIR بوجود الديناميكية الحياتية هي :

$$\begin{aligned} (N S(t))' &= -\lambda SNI + \mu N - \mu NS \\ (N I(t))' &= \lambda SNI - \gamma NI - \mu NI \quad \dots 5 \\ (N R(t))' &= \gamma NI - \mu NR \\ N S(t=0) &= NS_0 > 0, \quad NI(t=0) = NI_0 \geq 0 \\ N R(t=0) &= NR_0 \geq 0 \end{aligned}$$

وعند قسمة المعادلة (5) على N يصبح لدينا .

$$\begin{aligned} \dot{S}_t &= -\lambda SI + \mu - \mu S \\ \dot{I}_t &= \lambda SI - \gamma I - \mu I \quad \dots 6 \\ S(t=0) &= S_0 > 0, \quad I(t=0) = I_0 \geq 0 \end{aligned}$$

ومن المعلمات المهمة ايضا عدد التكاثر الاساسي R_0 وهو يعرف عالمياً على أنه العدد المتوقع من الحالات الثانوية التي ينتجها شخص مصاب في وقت مبكر من الوباء، وهذا المقياس يفيد في تحديد ما اذا كان المرض المعدي يمكن أن ينتشر بين مجموعه من الافراد أم لا، ويمكن كتابته كالآتي :

$$R_0 = \frac{\lambda}{\gamma} S_0$$

وعندما يكون $R_0 > 1$ فإن العدوى سوف تنتهي تماما على المدى الطويل .وعندما تكون $R_0 < 1$ فإن العدوى قادرة على الانتشار بين جميع الافراد أي أن يصبح وبائي . اما عندما $R_0 = 1$ هي القيمة الحرجة . ويعتبر النموذج SIR النموذج الاساسي ويمكن من خلال اضافة واجراء بعض التعديلات على الحالات حتى نحصل على النماذج الوبائية جديدة.

5-4 : إنموذج MSIR

في العديد من حالات العدوى وجد أن الاطفال حديثي الولادة أقل تأثراً بشكل غير متناسب ، وواحد من هذه العدوى هي الحصبة حيث وجد أن الاطفال أقل حساسية وذلك بسبب المناعة السلبية الممنوحة لهم عن طريق الاجسام المضادة التي تنتقل اليهم عبر المشيمة من الام ، لذلك تم اضافة حالة جديدة (M) للنموذج الاساسي . وهي المناعة المشتقة من الام .

5-5 : الإنموذج الناقل

في بعض الامراض . مثل السل قد لايتعافى بعض الافراد تماما ويستمرون في حمل العدوى ، في وقت المناسب قد يمرضون مرة اخرى أو قد يصيبون الافراد المعرضين للاصابة أو كليهما ، لنمذجة هذه العدوى مرة اخرى تم تكوين حالة جديدة (C) التي تبديل مع (I) .

5-6 : إنموذج SEIR

في العديد من الامراض المعدية هنالك فترة تعرض بعد انتقال العدوى الى المعرضين للاصابه . الافراد عندما يحتمل أن ينفلوا العدوى تأتي هذه الفترة قبل أن تتطور اعراض هؤلاء الناس ونقل العدوى لذلك تم تحديد حجرات جديدة من الافراد المعرضين (E)

5-7: إنبودج SEIS

تظهر بعض الاصابات خصائص كل من نمودج SIS و SEIR أي انه لا يمنح مناعه طويلة الامد.

5-8: إنبودج MSEIR

تظهر بعض الاصابات خصائص كل من النمودج MSIR و SEIR

5-9: إنبودج MSEIRS

وهو نمودج يشبه نمودج MSEIR بأستثناء حقيقة ان المناعه المستمده من R مؤقته.

6-مناعة القطيع والتطعيم : Herd Immunity and Vaccination

يقال للسكان ان لديهم مناعه فطيع لمرض ما ، اذا كان عدد كافي من الناس محصنين بحيث لاينتشر المرض اذا تم ادخاله فجاءه في مكان ما ، اذ عندما يكون المجتمع متجانس يكون الاختلاط متجانس ايضا ويتم توزيع المناعة بشكل موحد في السكان ، فسيتم الحصول على مناعة القطيع اذا كان جزء كبير منه محصن وموزع بشكل منتظم ويتم تحقيق مناعة القطيع في السكان عن طريق تطعيم المعرضين للاصابة من السكان . اذا كان R هو الجزء المحصن من السكان بسبب التطعيم . عندئذ

$$S=1-R$$

وعندما $I=0$ تتحقق مناعة القطيع اذا

$$\sigma(I - R) < 1 \quad \text{or} \quad R > I - \frac{1}{\sigma}$$

ويمكن الحصول على تقديرات R_0 خلال المراحل المبكره من تفشي الوباء وعيب هذه الطريقة هو انها تستخدم كميته صغيره من البيانات لحساب كميته مهمه . مما يؤدي الى التحيز . او من خلال استخدام الحجم النهائي لتفشي الوباء واجمالي حجم السكان .

7-تقدير المعلمات : Estimate the Parameter

أن ايجاد قيم معلمات النمودج التي تعطي اقرب تطابق بين تنبؤات النمودج والبيانات . لمعرفة افضل ما يفعله النمودج من الناحية العملية. ولفهم الاليات . ومن اهم الطرق :

1- المربعات الصغرى (*Least Square*)

2- طريقة الامكان (*Likelihood method*)

3- خوارزمية التحسين (*Optimization algorithms*)

لمعرفة ملائمة النمادج الوبائية الديناميكية الحتميه للبيانات . يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى لقياس التقارب بين البيانات والتنبؤ على النمودج . ويمكننا بعد ذلك البحث في جميع القيم الممكنه لمعلمات النمودج .

8-المصادر :

- 1- Ashish Menon, Nithin K Rajendran, Anish Chandrachud, Girish Setlur , (2020) "Modelling and simulation of COVID-19 propagation in a large population with specific reference to India". Department of Physics Indian Institute of Technology Guwahati.
- 2- Hethcote, H.W., Van Ark. J.W. (1987) Epidemiological models for heterogeneous populations; proportionate mixing, parameter estimation and immunization programs. Math. Biosci. 84, 85- 118.
- 3- Hethcote. H.W., Yorke, J.A. (1984) Gonorrhea Transmission Dynamics and Control. Lecture Notes in Biomathematics, vol. 56, Springer, Berlin Heidelberg New York
- 4- Miller, R.K., Michel, A.N. (1982) Ordinary Differential Equations. Academic Press, New York. Mollison, D. (1977) Spatial contact models for ecological and epidemic spread. J.R. Statist. Soc. Ser. 839, 283- 326.

.....

