افضل تقدير لدالة معولية النظامين المتسلسل والمتوازي لتوزيع لوماكس بالاستناد الى بيانات مراقبة من النوع الثاني

م.د. وفاء جعفر حسين/ جامعة واسط wjaffer@uowasit.edu.iq
م.د. حسام عبد الرزاق رشيد/ الجامعة المستنصرية husamstat@uomustansiriyah.edu.iq
م.د. احمد عبدعلي عكار/ الجامعة المستنصرية drahmedabd@uomustansiriyah.edu.iq

P:ISSN 1813 - 6729
E:ISSN 2707 - 1359
http://doi.org/10.31272/JAE.43.2020.123.25

تاريخ استلام البحث 2019/10/28 **مقبول للنشر بتاريخ 2019/12/25**

المستخلص:

في هذا البحث تم تقدير دالة المعولية مع معلمة الشكل لتوزيع لوماكس لنظام مؤلف من المركبات المستقلة (m) المرتبطة معاً بشكل متسلسل ومتوازي لبيانات مراقبة من النوع الثاني، اذ تم استعمال طريقة التوقع البيزي بثلاث دوال توزيعية اولية للمعلمات الفوقية وطريقة بيز القياسية بالاعتماد على دالة خسارة تربيعية وطريقة الامكان الاعظم، ومن خلال اسلوب المحاكاة تمت المقارنة بين هذه الطرائق باستعمال معيار متوسط الخطا النسبي المطلق لنتائج التقدير، اذ أظهرت المقارنة بين الطرائق، افضلية طريقة التوقع البيزي في التقدير.

مجلة الادارة والاقتصاد
العدد 123 / **اذار** / 2020
الصفحات 458 -447

1- المقدمة : Introduction

انصب تركيز الباحثين في العقود السابقة في تحديد افضل هيكل ممكن للمكونات التي يمكن استخدامها في الانظمة وذلك للتقليل من التكلفة وتوفير افضل الخدمات لتشغيل الانظمة بصورة شاملة ولقد اثمرت عن العديد من هياكل المكونات في الانظمة التي تفي بالمتطلبات من حيث المتانة وتقليل الكلفة. ومن الشائع تفضيل البنية المتوازية في الاجهزة على بقية البنى وذلك من اجل التقليل من ضغوط العمل في النظام. لقد قام الباحثون بكتابة العديد من الابحاث حول التقييم النظري للمعولية للأنظمة في ظل تكوينات مختلفة من المكونات، ونشير هنا الى الباحث Okasha[6] الذي استعمل طريقة التوقع البيزي لتقدير دالة المعولية لتوزيع لوماكس للبيانات المراقبة من النوع الثاني، اما

في بحثنا هذا تم التطرق الى تقدير معوليه النظامين المتسلسل والمتوازي لتوزيع لوماكس Lomax distribution الذي يعد من توزيعات الفشل المهمة والتي تسمى بالتوزيعات ثقيلة الذيل Heavy – tail probability distribution وهو توزيعا مقترحا من توزيع باريتو النوع الثاني Pareto type II وقد استعمل في تحليل بيانات الاحصاء الحيوي كذلك

نموذجا تصادفيا بمعدل فشل متناقص لاوقات تشغيل المركبات الالكترونية قيد الدراسة والبحث[5].

يقال للمتغير العشوائي t انه يتبع توزيع لوماكس Lomax distribution بالمعلمتين (α,β) وحسب الدالة الاحتمالية الاتية [1].

$$f(t)=\beta\alpha(1+\beta t)^{-(\alpha+1)} \quad t>0,\alpha>0,\beta>0 \quad \dots(1)$$

حيث ان α تمثل معلمة الشكل و β تمثل معلمة القياس.

اما دالة التوزيع التجميعية فتكون كالاتي :

$$F(t)=1-(1+\beta t)^{-\alpha} \quad t>0,\alpha>0,\beta>0 \quad \dots(2)$$

عندئذ فأن دالة المعولية ستكون :

$$R(t)=1-F(t)=(1+\beta t)^{-\alpha} \quad t>0,\alpha>0,\beta>0 \quad \dots(3)$$

في هذا البحث سيتم تقدير دالة معولية النظامين المتسلسل والمتوازي وذلك بالاعتماد على بيانات مراقبة من النوع الثاني Censoring data type II والتي تعرف على انها اختيار r من الوحدات والتي تكون اقل من حجم العينة n أي ان r<n.

2- معولية النظام المتسلسل: Reliability of series

لنفرض ان لدينا نظام مؤلف من m من المركبات او الوحدات المرتبطة بشكل متسلسل حيث يتوقف النظام عن العمل اذا توقف احدى مركباته عن العمل[2].

وبفرض ان زمن الحياة لكل مركبة من المركبات يتبع توزيع لوماكس Lomax distribution بمعلمة قياس $\beta_i\ ,i=1,2,\dots,m$ ومعلمة شكل $\alpha_i\ ,i=1,2,\dots,m$ علما ان زمن الحياة مستقل لكل مركبة وبدالة كثافة احتمالية كالاتي :

$$f(t,\alpha_i,\beta_i)=\alpha_i\beta_i(1+\beta_i t)^{-(\alpha_i+1)}$$
$$t>0,\alpha_i>0,\beta_i>0 \quad \dots(4)$$

عندئذ ستكون معولية كل مركبة كالاتي :

$$R_i(t)=\int_t^{\infty}\alpha_i\beta_i(1+\beta_i t)^{-(\alpha_i+1)}dt$$
$$R_i(t)=(1+\beta_i t)^{-\alpha_i} \quad \dots(5)$$

اما معولية النظام المتسلسل series ولـ m من المركبات ستكون كالاتي :

$$R(t,s,m)=\prod_{i=1}^{m}R_i(t)$$

$$R(t,s,m)=\prod_{i=1}^{m}(1+\beta_i t)^{-\alpha_i}$$

اما اذا كانت المركبات متماثلة Identical Components فأن معوليه النظام ستكون :

$$R(t,s,m)=(1+\beta t)^{-m\alpha} \qquad \dots(6)$$

3- معولية النظام المتوازي Reliability of Parallel

اما اذا كان النظام مؤلف من m من المركبات او الوحدات المرتبطة بشكل متوازي parallel حيث لايتوقف النظام عن العمل اذا توقف احدى مركباته عندئذ فأن معولية النظام المتوازي ستعطى كما يلي:

$$R(t,p,m)=1-\prod_{i=1}^{m}(1-R_i(t))$$

$$R(t,p,m)=1-\prod_{i=1}^{m}(1-(1+\beta_i t)^{-\alpha_i})$$

$$R(t,p,m)=1-(1-(1+\beta_1 t)^{-\alpha_1})(1-(1+\beta_2 t)^{-\alpha_2})\dots(1-(1+\beta_{2m} t)^{-\alpha_m})$$

$$R(t,p,m)=\sum_{i=1}^{m}(1+\beta_i t)^{-\alpha_i}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m}(1+\beta_i t)^{-(\alpha_i+\alpha_j)}+\dots+(-1)^{m+1}$$

اما معوليه النظام المتوازي (parallel) للمركبات المتماثلة identical components فهي كالاتي :

$$R(t,p,m)=1-(1-(1+\beta t)^{-\alpha})^m$$

$$R(t,p,m)=\binom{m}{1}(1+\beta t)^{-\alpha}-\binom{m}{2}(1+\beta t)^{-2\alpha}+\dots+(-1)^{m+1}(1+\beta t)^{-m\alpha}$$

$$R(t,p,m)=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\binom{m}{j}(1+\beta t)^{-j\alpha} \qquad \dots(8)$$

سينصب هدفنا في هذا البحث تقدير معلمة الشكل α ودالة المعولية للنظام المتسلسل في المعادلة (6) كذلك تقدير معولية النظام المتوازي في المعادلة (8) وذلك بتوليد بيانات مراقبة من النوع الثاني.

4– طرائق تقدير معولية الانظمة (المتسلسل ، المتوازي):

لغرض تقدير دالة معولية النظامين المتسلسل والمتوازي سوف يتم التطرق الى طرائق التقدير وهي طـريقة التوقع الـبيزي E-Bayesian estimation ومقارنتها مع طريقة بيز القياسية للتقدير estimation standard Bayesian method وطريقة الامكان الاعظم maximum likelihood method .

1-4 طريقة الامكان الاعظم (MLE) Maximum likelihood method

تعتبر طريقة الامكان الاعظم من الطرائق الكلاسيكية المهمة في عملية التقدير لما تتمتع به من خصائص عديدة واهم هذه الخصائص خاصية الثبات (Invariance property) كما انها لا توظف المعلومات الاولية حول المعلمات في عملية التقدير.

لنفرض ان $t_1<t_2<\dots<t_r$ تمثل اول r من اوقات الفشل لعينة حددت سابقا بحجم n وضعت تحت المراقبة فأن t هو متغير عشوائي يتبع توزيع لوماكس بالمعلمتين(α,β) اما دالة الامكان الاعظم للمشاهدات تكون كالاتي[9].

$$L(\alpha,\beta,t)=\frac{n!}{(n-r)!}\prod_{i=1}^{r}f(\alpha,\beta,t_i)[R(t_r)]^{n-r} \qquad \dots(9)$$

$$L(\alpha,\beta,t)=\frac{n!}{(n-r)!}\alpha^r v(\beta;\underline{t})e^{-\alpha T} \qquad \dots(10)$$

$$\underline{t}=(t_1,t_2,\dots,t_r),\quad v(\beta;\underline{t})=\frac{\beta^r}{\prod_{i=1}^{r}(1+\beta t)}$$

$$T = \sum_{i=1}^{r} \log(1+\beta t_i) + (n-r)\log(1+\beta t_r)$$

وان $(n-r)$ هي عدد المركبات المتبقية بعد زمن الفشل للمركبة r [9].

فأن مقدر الامكان الاعظم للمعلمة الشكل α والذي يرمز له بالرمز $\hat{\alpha}_{mle}$ فيتم الحصول عليه بعد اخذ اللوغارتم الطبيعي للمعادلة (10) واشتقاقها بالنسبة الى α فيكون المقدر كالاتي[6].

$$\hat{\alpha}_{mle} = \frac{r}{T} \quad \dots(11)$$

وان مقدر دالة معولية النظام المتسلسل Series system بطريقة الامكان الاعظم والذي يرمز له $\hat{R}_{mle(s)}$ يتم الحصول عليه بتعويض المعادلة (11) في المعادلة (6) وكالاتي[8].

$$\hat{R}_{mle(s)} = (1+\beta t)^{-m\left(\frac{r}{T}\right)} \quad \dots(12)$$

وبنفس الاسلوب يتم ايجاد مقدر الامكان الاعظم لدالة معوليه النظام المتوازي parallel system والذي يرمز له $\hat{R}_{mle(p)}$ بتعويض المعادلة (11) في المعادلة (8) وكالاتي[8].

$$\hat{R}_{mle(p)} = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1}\binom{m}{j}(1+\beta t)^{-j\left(\frac{r}{T}\right)} \quad \dots(13)$$

2-4 طريقة بيز القياسية *Standard Bayesian method*

تنص هذه الطريقة على ان المعلومات الاولية التي تتوفر حول المعلمة المراد تقديرها يمكن ان تصاغ على شكل دالة يطلق عليها دالة الكثافة الاحتمالية الاولية Prior p.d.f وهذه الدالة ماهي الا تعبير حول المعرفة المسبقة لهذه المعلمة.

وبالاستناد على عينة بيانات مراقبة من النوع الثاني censored type II data بحجم r حددت من n من الوحدات تحت تجربة الفحص والتي تخضع لتوزيع لوماكس Lomax distribution بالمعلمتين β, α وبافتراض ان المعلمة β معلومة وان التوزيع الاولي للمعلمة α هو توزيع كاما Gamma distribution[6].

$$g(\alpha) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\alpha^{a-1}e^{-b\alpha} \quad \alpha > 0, a > 0, b > 0 \quad \dots(14)$$

وبالرجوع الى دالة الامكان للمشاهدات (10) وباستخدام صيغة بيز العكسية Bayesian inversion formula فأن الدالة الاحتمالية اللاحقة للمعلمة α هي[8].

$$q(\alpha, \underline{t}) = K\alpha^{r+a-1}e^{-(b+T)\alpha} \quad \alpha > 0, a > 0, b > 0 \quad \dots(15)$$

حيث ان :

$$K = \frac{(b+T)^{r+a}}{\Gamma(r+a)}$$

ان مقدر بيز للمعلمة α هو توقع دالة الخسارة البيزيةBayesian loss function

$$Risk(\hat{\alpha}) = E[L(\hat{\alpha}, \alpha)] = \int_{\alpha} L(\hat{\alpha}, \alpha)q(\alpha, \underline{t})d\alpha \quad \dots(16)$$

وباستعمال دالة خسارة تربيعيه فأن مقدر بيز هو

$$\hat{\alpha}_B = E_q(\alpha, \underline{t})$$

$$\hat{\alpha}_B = \frac{r+a}{b+T} \quad \dots(17)$$

اما مقدر بيز لدالة المعولية للنظام المتسلسل بالاستناد على دالة خسارة مربعه الخطأ فيكون كالاتي[7].

$$\hat{R}_{B_s} = E_Q[R(t,s,m), \underline{t}] \quad \dots(18)$$

حيث ان دالة الامكان الاعظم لمعولية الانظمة فيتم الحصول عليها من المعادلة (15) باجراء التحويل الاتي :

$$\alpha = \frac{-\ln R(t)}{\ln(1+\beta t)^m}$$

فتكون دالة الامكان الاعظم لمعولية الانظمة كالاتي:

$$Q(R(t);t) = \frac{K}{(\ln(1+\beta t)^{m(r+a)}} R(t)^{b+T/\ln(1+\beta t)^{m}}(-\ln R(t))^{r+a-1},$$

$$0 < R(t) < 1 \qquad \dots(19)$$

عندئذ فان :

$$\hat{R}_{B_s} = \left(\frac{b+T}{b+T+\delta}\right)^{r+a} \qquad \dots(20)$$

حيث ان :

$$\delta = m\ln(1+\beta t)$$

اما مقدر بيز لدالة المعولية للنظام المتوازي بالاستناد على دالة خسارة مربعه الخطأ فيكون كالاتي :

$$\hat{R}_{B_p} = E_Q[R(t,p,m),t] \qquad \dots(21)$$

$$\hat{R}_{B_p} = \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\binom{m}{j}\left(\frac{b+T}{b+T+\delta}\right)^{r+a} \qquad \dots(22)$$

3-4 طريقة التوقع البيزي للتقدير E-Bayesian estimation method

ان تقدير معلمة الشكل α ودالة معولية النظامين المتسلسل والمتوازي لتوزيع لوماكس Lomax distribution يمكن الحصول عليه بالاستناد على ثلاث توزيعات اولية مختلفة للمعلمات الفوقية a ,b وحسب الباحث [4] Han ان هذه المعلمات يجب اختيارها بحيث تضمن ان دالة التوزيع الاولية للمعلمة α المعطاة في المعادلة (14)

تكون متناقصة للمعلمة α حيث ان مشتقة دالة التوزيع الاولية بالنسبة الى المعلمة α هي :

$$\frac{dg(\alpha,a,b)}{d\alpha} = \frac{b^{a}}{\Gamma(a)}\alpha^{a-2}e^{-b\alpha}[(a-1)-b\alpha] \qquad \dots(23)$$

حيث يلاحظ من المشتقة (23) ان الدالة $g(\alpha,a,b)$ متناقصة لـ α عندما تكون $0 < a < 1$ وان $b > 0$

فأن مقدر التوقع البيزي للمعلمة α يمكن حسابة كالاتي:

$$\hat{\alpha}_{EBi} = \iint_{\Psi} \hat{\alpha}_B(a,b)\pi_i(a,b)\,da\,db \quad i = 1,2,3 \qquad \dots(24)$$

حيث ان $\pi_i(a,b)$ التوزيعات الاحتمالية الاولية المختلفة للمعلمات الفوقية hyper parameters بحيث ان $0 < a < 1$

$0 < b < s$ حيث ان s هو الحد الاعلى للمعلمة b اذ يتم اختياره بحيث لايبتعد كثيرا عن قيمة a وذلك لغرض المحافظة على حصانة المقدر البيزي[4].

وعلى افتراض ان المعلمات الفوقية a ,b مستقلة فأن التوزيع المشترك للمعلمتين يكون كالاتي

$$\pi(a,b) = \pi(a)\pi(b)$$

فان دوال التوزيع الاحتمالية الاولية للمعلمات الفوقية a, b فتعطى كالاتي [6].

$$\pi_1(a,b) = \frac{1}{s\beta(u,v)}a^{u-1}(1-a)^{v-1} \qquad \dots(25)$$

$$\pi_2(a,b) = \frac{2}{s^2\beta(u,v)}(S-b)a^{u-1}(1-a)^{v-1} \qquad \dots(26)$$

$$\pi_3(a,b) = \frac{2b}{s^2\beta(u,v)}a^{u-1}(1-a)^{v-1} \qquad \dots(27)$$

حيث ان $\beta(u,v)$ هي دالة بيتا Beta function عندئذ سيكون مقدر التوقع البيزي حسب دالة التوزيع الاولي للمعلمات الفوقية a , b في الصيغة (25) كالاتي :

$$\hat{\alpha}_{EB1} = \int_0^1 \int_0^s \hat{\alpha}_B\, \pi_1(a,b)\, db\, da$$

$$\hat{\alpha}_{EB1} = \int_0^1 \int_0^s \frac{r+a}{b+T} \frac{1}{s\beta(u,v)} a^{u-1}(1-a)^{v-1} db\, da$$

$$\hat{\alpha}_{EB1} = \frac{1}{s}\left(r + \frac{u}{u+v}\right) \ln\left[\frac{s+T}{T}\right] \qquad \dots(28)$$

وبنفس الاسلوب نجد مقدر التوقع البيزي للمعلمة α حسب التوزيع الاولي للمعلمات الفوقية a, b وحسب الصيغتين (26) (27) على التوالي كالاتي :

$$\hat{\alpha}_{EB2} = \int_0^1 \int_0^s \frac{r+a}{b+T} \frac{2}{s^2\beta(u,v)} (S-b) a^{u-1}(1-a)^{v-1} db\, da$$

$$\hat{\alpha}_{EB2} = \frac{2}{s}\left(r + \frac{u}{u+v}\right) \left[\frac{T+s}{s} \ln\left(\frac{T+s}{T}\right) - 1\right] \qquad \dots(29)$$

$$\hat{\alpha}_{EB3} = \int_0^1 \int_0^s \frac{r+a}{b+T} \frac{2b}{s^2\beta(u,v)} a^{u-1}(1-a)^{v-1} db\, da$$

$$\hat{\alpha}_{EB3} = \frac{2}{s}\left(r + \frac{u}{u+v}\right) \left[1 - \frac{T}{s} \ln\left(\frac{T+s}{T}\right)\right] \qquad \dots(30)$$

4-4 طريقة التوقع البيزي لتقدير معولية النظام المتسلسل E-Bayesian estimation for reliability series system

لتقدير دالة معولية النظام المتسلسل series system باستعمال طريقة التوقع البيزي للتقدير وبالاستناد على دالة خسارة مربعة الخطأ Squared Error Loss Function والتوزيعات الاولية للمعلمات الفوقية a, b في الصيغ (25)(26)(27) على التوالي فيكون مقدر التوقع البيزي لمعولية النظام المتسلسل كالاتي :

$$\hat{R}_{EBsi} = \int_0^1 \int_0^s \hat{R}_{BS}(t) \pi_i(a,b)\, db\, da \qquad i = 1,2,3 \qquad \dots(31)$$

$$\hat{R}_{EBs1} = \int_0^1 \int_0^s \left(\frac{b+T}{b+T+\delta}\right)^{r+a} \frac{1}{s\beta(u,v)} a^{u-1}(1-a)^{v-1} db\, da$$

$$\hat{R}_{EBs1} = \frac{1}{s\beta(u,v)} \int_0^s \left(\frac{b+T}{b+T+\delta}\right)^r \left[\int_0^1 e^{a\ln\left(\frac{b+T}{b+T+\delta}\right)} a^{u-1}(1-a)^{v-1} da\right] db$$

$$\int_0^1 e^{a\ln\left(\frac{b+T}{b+T+\delta}\right)} a^{u-1}(1-a)^{v-1} da = F\left(u, u+v; \ln\left(\frac{b+T}{b+T+\delta}\right)\right)$$

ولمزيد من التفصيل حول التحويل في هذا التكامل يمكن الرجوع الى المصدر[3]. الصيغة .3.383(1) والتي نصها المعادلة (32)

$$\int_0^u x^{v-1}(u-x)^{m-1} e^{bx} dx = \beta(m,v) u^{m+v-1} {}_1F_1(v, m+v, \beta u) \qquad \dots(32)$$

حيث ان $_1F_1(v, m+v, \beta u)$ هي الدالة الهندسية الفوقية المعممة Generalized) Hyper geometric function)، عند اذن سيكون مقدر التوقع البيزي لدالة معولية النظام المتسلسل كالاتي :

$$\hat{R}_{EBs1} = \frac{1}{s} \int_0^s \left(\frac{b+T}{b+T+\delta}\right)^r F\left(u, u+v; \ln\left(\frac{b+T}{b+T+\delta}\right)\right) db \quad \dots(33)$$

وبنفس الاسلوب يمكن ايجاد مقدر التوقع البيزي لدالة معولية النظام المتسلسل بالاستناد الى دوال التوزيع الاولية للمعلمتين a, b في المعادلتين (26) (27) على التوالي كالاتي :

$$\hat{R}_{EBs2} = \int_0^1 \int_0^s \left(\frac{b+T}{b+T+\delta}\right)^{r+a} \frac{2}{s^2\beta(u,v)} (s-b) a^{u-1}(1-a)^{v-1} db\, da$$

$$=\frac{2}{s^2\beta(u,v)}\int_0^s (s-b)(\frac{b+T}{b+T+\delta})^r[\int_0^1 e^{a\ln(\frac{b+T}{b+T+\delta})}a^{u-1}(1-a)^{v-1}da]db$$

$$\hat{R}_{EBa2}=\frac{2}{s^2}\int_0^s (s-b)(\frac{b+T}{b+T+\delta})^r F(u,u+v;\ln\left(\frac{b+T}{b+T+\delta}\right)\ db \quad ...(34)$$

$$\hat{R}_{EBa2}=\int_0^1\int_0^s(\frac{b+T}{b+T+\delta})^{r+a}\frac{2b}{s^2\beta(u,v)}a^{u-1}(1-a)^{v-1}dbda$$

$$=\frac{2b}{s^2\beta(u,v)}\int_0^s (\frac{b+T}{b+T+\delta})^r[\int_0^1 e^{a\ln(\frac{b+T}{b+T+\delta})}a^{u-1}(1-a)^{v-1}da]db$$

$$\hat{R}_{EBa2}=\frac{2b}{s^2}\int_0^s (\frac{b+T}{b+T+\delta})^r F(u,u+v;\ln\left(\frac{b+T}{b+T+\delta}\right)\ db \quad ...(35)$$

ويمكن ايجاد نتائج التكاملات (33)(34)(35) بالطرق العددية مثل طريقة شبه المنحرف trapezoidal method.

<u>4-5 طريقة التوقع البيزي لتقدير معولية النظام المتوازي:</u>

<u>E-Bayesian estimation for reliability parallel system</u>

ان مقدر التوقع البيزي لدالة معولية النظام المتوازي Parallel system بالاستناد على دوال التوزيع الاولية للمعلمات الفوقية a,b والواردة في الصيغ (25)(26)(27) وعلى دالة خسارة مربعة الخطأ Squared Error Loss Function تكون كالاتي:

$$\hat{R}_{EB_{P1}}=\int_0^1\int_0^s\hat{R}_{Bp}(t)\pi_i(a,b)dbda \quad ...(36)$$

$$\hat{R}_{EB_{P1}}=\int_0^1\int_0^s\sum_{j=1}^m(-1)^{j-1}\binom{m}{j}(\frac{b+T}{b+T+\delta})^{r+s}$$

$$\frac{1}{s\beta(u,v)}a^{u-1}(1-a)^{v-1}dbda$$

$$\hat{R}_{EB_{P1}}=\frac{1}{s}\sum_{j=1}^m(-1)^{j-1}\binom{m}{j}$$

$$\int_0^s(\frac{b+T}{b+T+\delta})^r F(u,u+v;\ln\left(\frac{b+T}{b+T+\delta}\right)\ db \quad ...(37)$$

وكما بينا سابقا ان الدالة $F(.,.;.)$هي الدالة الهندسية الفوقية المعممة (Hyper geometric function Generalized) وبنفس الاسلوب الذي اتبع في المعادلة (32) لتحويل التكامل .

وبنفس الاسلوب نجد مقدر التوقع البيزي اعتمادا على دوال التوزيع الاولية للمعلمات الفوقية a,b الواردة في الصيغتين (26)(27) على التوالي وكالاتي:

$$\hat{R}_{EB_{P2}}=\frac{2}{s^2}\sum_{j=1}^m(-1)^{j-1}\binom{m}{j}$$

$$\int_0^s(s-b)(\frac{b+T}{b+T+\delta})^r F(u,u+v;\ln\left(\frac{b+T}{b+T+\delta}\right)\ db \quad ..(38)$$

$$\hat{R}_{EB_{P3}}=\frac{2}{s^2}\sum_{j=1}^m(-1)^{j-1}\binom{m}{j}$$

$$\int_0^s(b)(\frac{b+T}{b+T+\delta})^r F(u,u+v;\ln\left(\frac{b+T}{b+T+\delta}\right)\ db \quad ...(39)$$

5– المحاكاة:

تتضمن صياغة انموذج المحاكاة اربع مراحل يستند عليها تقدير معلمة الشكل shape parameterα على فرض ان معلمة القياس β معلومة ودالة المعولية للنظامين المتسلسل والمتوازي لتوزيع لوماكس Lomax distribution وهذه المراحل كالاتي:

المرحلة الاولى : في هذه المرحلة سيتم تعيين قيم العينات الافتراضية واحجام العينات تحت المراقبة n واحجام عينات الفشل r كما يلي

نولد قيم المعلمات الفوقية a,b وكالاتي

$a \sim beta(u,v)$, $b \sim uniform(0,s)$

بافتراض ان $s = 0.1$, $u = 4, v = 5$

كذلك نقوم بتوليد قيمة افتراضية للمعلمة α وحسب توزيع كاما Gamma distribution

$\alpha \sim Gamma(a,b)$

المرحلة الثانية: توليد عينات مراقبة النوع الثاني لتوزيع لوماكس Lomax distribution (بطريقة التحويل المعكوس) وحسب الدالة الاتية:

$t = [[(1-U)\hat{} \; 1/\alpha] - 1]/\beta$

المرحلة الثالثة: نقدر المعلمة α بالطرق المذكورة في الجانب النظري من البحث وفق الصيغ (30)(29)(28)(17)(11)

المرحلة الرابعة : تقدير معولية النظام المتسلسل بالطرق المذكورة في الجانب النظري من البحث وفق الصيغ (35)(34)(33)(20)(12)

المرحلة الخامسة : تقدير معولية النظام المتوازي بالطرق المذكورة في الجانب النظري وفق الصيغ (39)(38)(37)(22)(13)

المرحلة السادسة: وهي المرحلة التي يتم فيها المقارنة بين قيمة المعلمة α والمقدرات لها وفق الطرق المستخدمة في البحث ولأجل المقارنة الدقيقة بين افضلية المقدرات سيكون معيار المقارنة هو متوسط الخطأ النسبي المطلق(MAPE) Mean absolute percentage error

$$MAPE(\hat{\alpha}) = \frac{1}{it}\sum_{i=1}^{it}\left|\frac{\alpha - \hat{\alpha}_i}{\alpha}\right| \quad \dots (40)$$

وقد كررت كل تجربة 1000 مرة؛ $(it = 1000)$

والجداول الاتية تمثل نتائج المحاكاة

جدول (1) قيم المعلمة المقدرة α بالطرائق المختلفة عندما

$u = 4, v = 5, s = 0.1$

n	R	$\hat{\alpha}_{mle}$	$\hat{\alpha}_{E}$	$\hat{\alpha}_{EB1}$	$\hat{\alpha}_{EB2}$	$\hat{\alpha}_{EB2}$
25	15	0.2590	0.2587	0.2582	0.2585	0.2586
	20	0.2377	0.2372	0.2361	0.2359	0.2363
	25	0.2163	0.2153	0.2148	0.2145	0.2150
30	20	0.2835	0.2890	0.2840	0.2822	0.2855
	25	0.2662	0.2688	0.2639	0.2631	0.2646
	30	0.2135	0.2010	0.2007	0.2001	0.2011
50	20	0.2756	0.2749	0.2733	0.2729	0.2740
	30	0.2576	0.2562	0.2553	0.2549	0.2555
	35	0.2533	0.2529	0.2525	0.2520	0.2528
	40	0.2234	0.2229	0.2221	0.2216	0.2225
	45	0.2156	0.2147	0.2132	0.2125	0.2136
	50	0.2033	0.2023	0.2019	0.2014	0.2022
70	20	0.2987	0.2975	0.2966	0.2961	0.2970
	35	0.2892	0.2881	0.2876	0.2870	0.2879
	50	0.2387	0.2376	0.2361	0.2358	0.2363
	60	0.2165	0.2157	0.2150	0.2148	0.2152
	65	0.2073	0.2066	0.2060	0.2058	0.2063
	70	0.2011	0.2008	0.2006	0.2002	0.2008

جدول (2) متوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE) لقيم المعلمة α بالطرائق المختلفة عندما $u = 4, v = 5, s = 0.1$

n	R	$\hat{\alpha}_{mle}$	$\hat{\alpha}_{s}$	$\hat{\alpha}_{ss1}$	$\hat{\alpha}_{ss2}$	$\hat{\alpha}_{ss3}$
25	15	0.5822	0.5734	0.5661	0.5648	0.5673
	20	0.4554	0.4549	0.4530	0.4533	0.4537
	25	0.2084	0.2080	0.2073	0.2070	0.2074
30	20	0.6221	0.6162	0.6120	0.6112	0.6131
	25	0.5112	0.5022	0.5006	0.5001	0.5013
	30	0.3493	0.3457	0.3437	0.3420	0.3440
50	20	0.5933	0.5892	0.5883	0.5878	0.5885
	30	0.5821	0.5809	0.5805	0.5802	0.5808
	35	0.5755	0.5749	0.5743	0.5739	0.5745
	40	0.4912	0.4909	0.4904	0.4902	0.4908
	45	0.4721	0.4719	0.4711	0.4708	0.4915
	50	0.4356	0.4344	0.4331	0.4328	0.4333
70	20	0.5932	0.5927	0.5921	0.5916	0.5923
	35	0.5576	0.5564	0.5555	0.5550	0.5559
	50	0.5065	0. 506	0.5055	0.5050	0.5058
	60	0.4756	0.4751	0.4748	0.4744	0.4750
	65	0.4378	0.4365	0.4363	0.4362	0.4363
	70	0.4076	0.4072	0.4070	0.4070	0.4071

جدول (3) مقدرات دالة معولية النظام المتسلسل بالطرائق المختلفة عندما $u = 4, v = 5, s = 0.1, m = 2$

N	R	$\ddot{R}_{mle(s)}$	$\ddot{R}_{s_s}$	$\ddot{R}_{ss_{s1}}$	$\ddot{R}_{ss_{s2}}$	$\ddot{R}_{ss_{s3}}$
25	15	0.4449	0.435	0.4322	0.4319	0.4325
	20	0.4532	0.443	0.4421	0.4417	0.4422
	25	0.4824	0.475	0.4734	0.4719	0.4749
30	20	0.4493	0.4388	0.4365	0.4361	0.4370
	25	0.4410	0.4389	0.4367	0.4366	0.4375
	30	0.4412	0.4390	0.4368	0.4367	0.4378
50	20	0.5059	0.5066	0.5068	0.5060	0.5070
	30	0.5070	0.5069	0.5074	0.5072	0.5079
	35	0.5090	0.5085	0.5080	0.5079	0.5082
	40	0.5099	0.5071	0.5056	0.5050	0.5059
	45	0.5110	0.5108	0.5106	0.5104	0.5106
	50	0.5270	0.5265	0.5250	0.5244	0.5253
70	20	0.5256	0.5238	0.5231	0.5228	0.5233
	35	0.5354	0.5348	0.5336	0.5330	0.5330
	50	0.5454	0.5429	0.5418	0.5411	0.5423
	60	0.5523	0.5515	0.5509	0.5505	0.5511
	65	0.5634	0.5629	0.5622	0.5619	0.5625
	70	0.5776	0.5770	0.5765	0.5760	0.5767

جدول (4) مقدرات دالة معولية النظام المتوازي بالطرائق المختلفة عندما

$u = 4, v = 5, s = 0.1, m = 2$

N	r	$R_{mle(p)}$	$\ddot{R}_{Bp}$	$\ddot{R}_{EBp1}$	$\ddot{R}_{EBp2}$	$\ddot{R}_{EBp3}$
25	15	0.9796	0.9730	0.9718	0.9712	0.9720
	20	0.9770	0.9725	0.9710	0.9709	0.9712
	25	0.8935	0.8920	0.8910	0.8907	0.8915
30	20	0.9820	0.9825	0.9814	0.9810	0.9820
	25	0.9439	0.9210	0.9192	0.9188	0.9195
	30	0.8982	0.7884	0.7855	0.7820	0.7860
50	20	0.9309	0.9305	0.9303	0.9300	0.9303
	30	0.9295	0.9288	0.9275	0.9270	0.2980
	35	0.9156	0.9150	0.9144	0.9142	0.9148
	40	0.9078	0.9065	0.9059	0.9055	0.061
	45	0.8876	0.8870	0.8865	0.8862	0.8869
	50	0.8578	0.8509	0.8499	0.8495	0.8500
70	20	0.9834	0.9826	0.9817	0.9815	0.9819
	35	0.9587	0.9576	0.9567	0.9561	0.9570
	50	0.8211	0.8205	0.8202	0.8200	0.8204
	60	0.8023	0.8019	0.8014	0.8011	0.8016
	65	0.8011	0.8009	0.8007	0.8005	0.8009
	70	0.7988	0.7980	0.7978	0.7977	0.7979

6 الاستنتاج والتوصيات:

1. بصورة عامة نجد ان مقدر التوقع البيزي للمعلمة α ودالة المعولية للنظامين المتسلسل والمتوازي هو اصغر من مقدر بيز ومقدر الامكان الاعظم .

2 . نلاحظ من الجداول كافة ان مقدر التوقع البيزي للمعلمة α ودالة معولية النظام المتسلسل والنظام المتوازي في حالاته الثلاثة يميل ان يكون اكثر كفاءة من مقدر بيز ومقدر الامكان الاعظم لهم لامتلاكها اصغر AMPE.

3. نلاحظ انخفاض AMPE مع زيادة حجم العينة n وزيادة عدد حالات الفشل r حيث ان مقدرات التوقع البيزي تكون لها كفاءة عالية .

4. نوصي باستعمال طريقة التوقع البيزي لتقدير معولية النظامين المتسلسل والمتوازي في الدراسات التطبيقية لكفاءتها في التقدير.

5. نوصي باستعمال طريقة التوقع البيزي لتقدير معولية انظمة الانتاج المختلفة لتوزيعات فشل اخرى مثل توزيعات عائلة Burr وغيرها من توزيعات الفشل المختلفة .

6- تكون طريقة التوقع البيزي اكثر حساسية مع العينات الصغيرة نسبيا.

6- المصادر:

1. AbdEllah, A.H., (2003),'Bayesian one sample prediction bounds for the Lomax distribution ', Indian J. Pur. Appl. Math., 34(1):101-109.
2. Chauhan, K, and Malik, C.(2017).EVALUATION OF RELIABILITY AND MTSF OF A PARALLEL SYSTEM WITH WEIBULL FAILURE LAWS. Journal of Reliability and Statistical Studies; ISSN (Print): 0974-8024, (Online): 2229-5666 Vol. 10, Issue 1.
3. Gradshteyn, I. and Ryzhik., M.(2007) ."Tables of Integrals, Series and Products". Corrected and Enlarged Edition. Prepared by Jeffrey, A., London: Academic Press, Inc., 96 – 99
4. Han, M. (1997) ."The structure of hierarchical prior distribution and its applications". Chinese Oper. Res. Manage. Sci. 6 (3) 31– 40
5. Kumar, P, Kour, U. and Kour, k.,(2018).Estimation of the Probability Density Function of Lomax Distribution. International Journal of Statistics and Economics; [Formerly known as the “Bulletin of Statistics & Economics” (ISSN 0973-7022)]; ISSN 0975-556X.
6. Okasha,H. (2014)“ E-Bayesian estimation for the Lomax distribution on Type-II censored data,” Journal of the Egyptian Mathematical Society, vol. 22, pp. 489-495.
7. Okasha, H. and AL Zhrani, B.(2013)." Empirical Bayes estimators of reliability performances using progressive type-II censoring from Lomax model". Journal of Advanced Research in Applied Mathematics Online ISSN: 1942-9649.

The Best Estimate of The Reliability Function of The Series and parallel systems with Lomax Distribution Based on Type II Censoring Data

Abstract:

In this paper, estimation the reliability function and the shape parameter for the Lomax distribution of a system consisting of independent compounds (m) linked together was serially and parallel to the censored data of type two. The method of Bayesian expected was used with three primary distribution functions for the hyper parameters and the standard bayes method based on a quadratic loss function and the maximum likelihood method, and through the simulation technique. the methods were compared using the Mean absolute percentage error criterion (MAPE) for the estimation results, the comparison between the methods showed that advantage of the Bayesian expected method of estimation.