مجلة الادارة والاقتصاد / السنة – 42 العدد 122 /2019
ISSN : 1813-6729 http://doi.org/10.31272/JAE.42.2019.122.30

تقدير معلمات توزيع ويبل بأستخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة - دراسة مقارنة

أ.د. عبدالرحيم خلف راهي*   رائد فيصل شرهان**

المستخلص :

يتناول هذا البحث تقدير معلمة الشكل β ومعلمة القياس η لدالة توزيع ويبل ذو المعلمتين باستخدام اسلوب التقدير الخطي لتحويل التوزيع الى نموذج انحدار خطي بسيط ومن ثم استخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (**OLS**) وطريقة المربعات الصغرى الموزونة (**WLS**)والمقارنة بينهما من خلال أصغر متوسط مربعات خطأ ممكن(**MSE**) .تم في هذا البحث استخدام بيانات فعلية لأعداد الوافدين (مختلف الجنسيات) الى العراق عن طريق منفذ زرباطية وتحليلها واستخلاص النتائج باستخدام برنامج **MS.Excel2007** وقد تبين ان طريقة المربعات الصغرى الموزونة أعطت أفضل مقدر بأقل متوسط لمربع الخطأ تم استخدام برنامج من خلاله تم الحصول على النتائج .

Estimation of Whipple distribution parameters using the ordinary least squares method and Weighted least-squares method (comparative study)

Abstract

This research deals with estimating the shape parameter and the measurement parameter for the two-parameter Weibull distribution function using a linear estimation method to convert the distribution into a simple linear regression model and then using the regular least squares method (OLS) and the weighted least squares method (WLS) and compare them through the smallest mean squares error possible (MSE) In this research, actual data were used to prepare the numbers of arrivals (different nationalities) to Iraq through the Zarbatiya port, and to analyze and extract the results using the MS.Excel2007 program. It was found that the weighted least squares method gave the best estimator with the lowest average for the error box. The results are obtained.

1- المقدمة :

لتوزيع ويبل مكانه وأهمية في حقل المعولية (Reliability) واختبار الحياة (Life testing) , وبعد تطور البحوث العلمية وبحوث الفضاء اصبح توزيع ويبل مرافق لتلك التطورات فقد ساهم كثير من الباحثين في دراسة خصائص هذا التوزيع وبحث طرائق تقدير معلمات الشكل ومعلمة القياس ومن هذه الطرائق طريقة الإمكان الأعظم والعزوم وطرق التقدير الخطي المستندة الى مبدأ المربعات الصغرى , وطرق التقدير المستندة الى البيانات المبتورة ,ولسنا بصدد استعراض لتلك الطرائق .

تم في هذه البحث عرض طريقتين لتقدير معلمات توزيع ويبل , باستخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة والمقارنة بين نتائج كل منهما من خلال استخدام معيار المقارنة متوسط مربعات الخطأ (MSE) .

هدف البحث :

- *يهدف البحث الى المقارنة بين مقدري طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية ووطريقة المربعات الصغرى الموزونة لتوزيع ويبل وأختيار افضل مقدر بأقل متوسط لمربعات الخطأ.*

* الجامعة المستنصرية / كلية الادارة والاقتصاد .
** باحث .

مستل من رسالة ماجستير
مقبول للنشر بتأريخ 2018/11/14

ISSN : 1813-6729 http://doi.org/10.31272/JAE.42.2019.122.30

2- *توزيع ويبل (Weibull Distribution)*[4][1].-

يعد توزيع weibull احد التوزيعات المستمرة المهمة وذلك لاستخدامه الواسع في المجال الصناعي والمجال الحياتي ,أول من اكتشفه العالم الفيزيائي السويدي Weibull (1939) وسمي باسمه ,ويعبر عن دالة كثافة التوزيع بالمعادلة أدناه :-

$$f(t;\beta,\eta,\theta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\eta}\left(\dfrac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} & ,t>0 \\ 0 & ,o/w\end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ولهذا التوزيع دالة تراكمية (تجميعية) هي :-

$$F(t)=1-e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

وان توزيع ويبل يتحول الى التوزيع الآسي عندما (β =1) والى توزيع رالي عندما (β =2) , والجدول (1) يبين بعض خصائص توزيع ويبل .

جدول رقم (1) خصائص توزيع ويبل

Properties	Formula
Mean	$\eta\ \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$
Median	$\eta\ [\ln(2)]^{\frac{1}{\beta}}$
Mode	$\eta\ \left[\frac{\beta-1}{\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}}, if(\beta \succ 1)$
Variance	$\eta^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right)^2\right]$
Skewness	$\dfrac{\left[\Gamma\left(1+\frac{3}{\beta}\right)\eta^3-3\mu\sigma^2-\mu^2\right]}{\sigma^3}$

ISSN : 1813-6729 http://doi.org/10.31272/JAE.42.2019.122.30

Moment Generating Function (MGF)	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\eta^n}{n!}\Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right)$
Characteristic Function(CF)	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n\eta^n}{n!}\Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right)$

3- أساليب التقدير الخطي [5][6] Linear Estimation Techniques:

هناك عدة طرائق يتم من خلالها اشتقاق أنموذج انحدار خطي بسيط من توزيع ويبل . الطريقة التي سنستعملها في هذا البحث كالآتي: سوف نفرض العلاقة الخطية بين المتغيرين وبالاعتماد على الدالة التجميعية(c.d.f.) لتوزيع ويبل من اجل التوصل الى علاقة بين هذه دالة التوزيع و معلمتي التوزيع بحيث نأخذ التحويل اللوغارتيمي المزدوج للدالة التجميعية وكما يأتي[6] :-

$$F(t)=1-e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$$

$$1-F(t)=e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$$

$$\frac{1}{1-F(t)}=e^{\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$$

$$Ln\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)=\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}$$

$$Ln\left[Ln\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)\right]=\beta Ln\left(\frac{t}{\eta}\right)$$

$$Ln\left[Ln\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)\right]=\beta(Lnt-Ln\,\eta)$$

$$\frac{1}{\beta}Ln\left[Ln\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)\right]=(Lnt-Ln\,\eta)$$

$$\frac{1}{\beta}Ln\left[Ln\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)\right]+Ln\,\eta=Lnt$$

$$Lnt=\frac{1}{\beta}Ln\left[Ln\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)\right]+Ln\,\eta\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

ISSN : 1813-6729 http://doi.org/10.31272/JAE.42.2019.122.30

الصيغة المشار اليها يمكن كتابتها كأنموذج انحدار خطي بسيط(6) : $y = bx + a$

إذ ان :- $y = Lnt \quad , \quad x = Ln\left[Ln\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)\right]$

$$, \quad a = Ln\eta \; b = \frac{1}{\beta}$$

وأن $\widehat{F}(t_i)$ تمثل القيمة التقديرية إلى $F(t_i;\beta;\eta)$, التي يتم إيجادها من خلال إحدى الطرائق اللامعلمية .

Mean rank	$\widehat{F(t)} = i/(n+1)$
Median rank	$\widehat{F(t)} = (i-0.3)/(n+0.4)$
Symmetric CDF	$\widehat{F(t)} = (i-0.5)/n$

4- طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (1) (2) (3)Ordinary Least Squares (OLS):

تعد هذه الطريقة من الطرائق الواسعة الاستخدام في التطبيقات الاحصائية, ويطلق عليها احيانا بالمربعات الصغرى الكلاسيكية,يستند مبدأ هذه الطريقة الى جعل مجموع مربعات ابعاد النقاط اقل مايمكن ,وللحصول على مقدرات المربعات الصغرى بالاعتماد على الصيغة الاتية :-

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(Lnt - \frac{1}{\beta}Ln\left[Ln\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)\right] - Ln\eta\right)^2$$

وباشتقاق هذه الصيغة لكل من $\left(Ln\eta, \frac{1}{\beta}\right)$ نحصل على التالي:

$$\hat{\eta} = \exp\left(\overline{Y} - \frac{1}{\hat{\beta}}\overline{X}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\left[Ln\left(Ln\frac{1}{1-F(t)}\right)\right]^2 - \left[\sum_{i=1}^{n}Ln\left(Ln\frac{1}{1-F(t)}\right)\right]^2}{n\sum_{i=1}^{n}Lnt_i Ln\left(Ln\frac{1}{1-F(t)}\right) - \sum_{i=1}^{n}Lnt_i\sum_{i=1}^{n}Ln\left(Ln\frac{1}{1-F(t)}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

5- طريقة المربعات الصغرى الموزونة (3)Weighted Least Squares (WLS):

هنالك العديد من الطرائق البديلة لتقدير معلمات أنموذج الانحدار ومن هذه الطرائق طريقة المربعات الصغرى الموزونة التي تعتمد على الأوزان (Wi) . في هذا البحث تم استخدام صيغة العالم(Bergman) لهذه الأوزان هي:

$$W_B = \left[\left(1-\widehat{F}(t)\right)Ln\left(1-\widehat{F}(t)\right)\right]^2$$

وللحصول على مقدرات المربعات الصغرى الموزونة بالاعتماد على الصيغة الآتية :-

مجلة الادارة والاقتصاد / السنة – 42 العدد 122 /2019
ISSN : 1813-6729 http://doi.org/10.31272/JAE.42.2019.122.30

$$S\left(Ln\eta,\frac{1}{\beta}\right)=\sum_{i=1}^{n}W_i\left(Lnti-Ln\eta-\frac{1}{\beta}Ln(Ln\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)\right)^2$$

وباشتقاق هذه الصيغة لكل من $\left(Ln\eta,\frac{1}{\beta}\right)$ نحصل على الاتي :

$$\hat{\eta}=\exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}W_iLnt_i}{\sum_{i=1}^{n}W_i}-\frac{1}{\hat{\beta}}\frac{\sum_{i=1}^{n}W_iLn\left[Ln\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)\right]}{\sum_{i=1}^{n}W_i}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots.(6)$$

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}W_i\sum_{i=1}^{n}W_i\left[Ln\left(Ln\frac{1}{1-F(t)}\right)\right]^2-\left[\sum_{i=1}^{n}W_I\sum_{i=1}^{n}Ln\left(Ln\frac{1}{1-F(t)}\right)\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}W_i\sum_{i=1}^{n}W_iLnt_iLn\left(Ln\frac{1}{1-F(t)}\right)-\sum_{i=1}^{n}W_iLnt_i\sum_{i=1}^{n}W_iLn\left(Ln\frac{1}{1-F(t)}\right)}\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

2- الجانب التطبيقي :

1-2 المقدمة :

تم اخذ البيانات المستخدمة في البحث من وزارة السياحة والآثار/هيئة السياحة/دائرة المجاميع السياحية والتي تمثلت بأعداد الوافدين من مختلف الجنسيات الى العراق عن طريق منفذ زرباطية الحدودي , عدد البيانات كانت (48) مشاهدة ,تم تحليل البيانات باستخدام البرنامج الإحصائي (Eesyfit5,6) وبرنامج (MS.Excel2007) والجدول التالي يوضح بيانات متغير الدراسة :

جدول رقم (1) يبين اعداد الوافدين (مختلف الجنسيات) الى العراق عن طريق منفذ زرباطية الحدودي مرتبة تصاعديا .

F(t)	ti	i	F(t)	ti	i	F(t)	ti	i	F(t)	ti	i
0.799587	1235	40	0.530992	1004	27	0.262397	566	14	0.014463	151	1
0.820248	1239	41	0.551653	1021	28	0.283058	588	15	0.035124	152	2
0.840909	1296	42	0.572314	1046	29	0.303719	615	16	0.055785	283	3
0.86157	1300	43	0.592975	1063	30	0.32438	635	17	0.076446	366	4
0.882231	1351	44	0.613636	1063	31	0.345041	671	18	0.097107	381	5
0.902893	1410	45	0.634298	1065	32	0.365702	696	19	0.117769	392	6
0.923554	1422	46	0.654959	1103	33	0.386364	732	20	0.13843	396	7
0.944215	1477	47	0.67562	1123	34	0.407025	751	21	0.159091	416	8
0.964876	1507	48	0.696281	1135	35	0.427686	772	22	0.179752	448	9
			0.716942	1139	36	0.448347	950	23	0.200413	498	10
			0.737603	1180	37	0.469008	950	24	0.221074	511	11
			0.758264	1181	38	0.489669	962	25	0.241736	528	12
			0.778926	1182	39	0.510331	974	26	0.014463	543	13

ISSN : 1813-6729 http://doi.org/10.31272/JAE.42.2019.122.30

باستخدام برنامج MS.Excel2007 تم تطبيق الصيغ (7,6,5,4) التي تم التطرق اليها في الجانب النظري و استخدام طريقة **Median rank** لتقدير قيمة F(t) ولغرض اختيار الطريقة الفضلى تم استعمال مقياس المقارنة **Mean Square Error** وصيغته كالآتي :

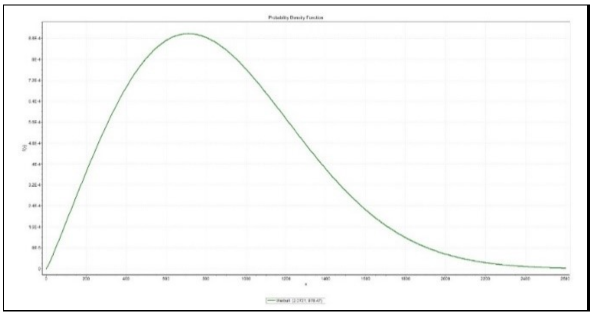
$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{F}(t_i) - F(t_i))^2}{n}$$

وكانت النتائج لكلا الطريقتين كالأتي :

جدول رقم (2) يمثل القيم التقديرية لمعلمتي توزيع ويبل حسب طريقة OLS &WLS

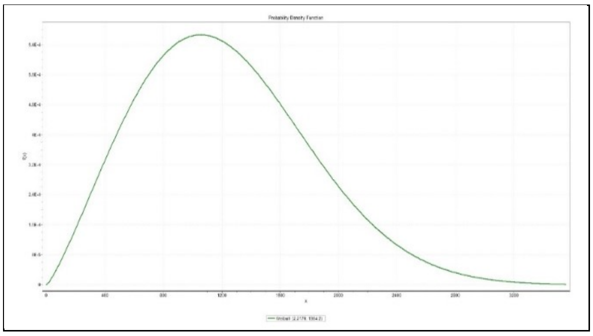
Method	β	η	MSE
OLS	2.220681	2646.514	0.210529
WLS	2.21758209	1384.24551	0.03947366

من خلال ملاحظة نتائج الجدول (2) يمكننا ملاحظة ان طريقة المربعات الصغرى الموزونة (**WLS**) أعطت اقل (**MSE**) مقارنة بطريقة المربعات الاعتيادية الصغرى (**OLS**) وعليه فأن طريقة الموزونة (**WLS**) هي الطريقة الفضلى لتقدير معلمتي الشكل والقياس لتوزيع ويبل ذو المعلمتين .



شكل(1)

الرسم البياني لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل باستخدام برنامج (Eesyfit5,6)



شكل(2)

الرسم البياني لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل باستخدام طريقة(WLS)

ISSN : 1813-6729 http://doi.org/10.31272/JAE.42.2019.122.30

2-2 الاستنتاجات :

1- من خلال نتائج جدول رقم (2) تبين لنا ان مقدرات WLS أفضل من مقدرات OLS من خلال تحقيق اقل ما يمكن لمتوسط مربعات الخطأ . .

2- استخدام أسلوب التقدير الخطي في تقدير معالم توزيع ويبل ذو المعلمتين أعطى نتائج موضوعية ومنطقية وأيضا امتياز هذا الاسلوب بالسهولة والمرونة عند تقدير معلمات توزيع ويبل .

3-2 التوصيات :

1- استخدام التقدير اللاخطي في تقدير معلمات توزيع ويبل ذو المعلمتين .

2- نوصي باعتماد مربعات الخطأ النسبي عند مقارنة بين طرائق التقدير لمعلمة الشكل والقياس للتوزيع في حالة الاختلاف في وحدات القياس .

3- التوسع في دارسة دالة توزيع ويبل ذو الثلاث معلمات وتقدير معلماتها باستخدام عدة طرائق .

References:

[1] Al-Fawzan, M. A.(2000), "Methods for Estimating the Parameters of the Weibull Distribution", King Abdulaziz City for Science and Technology, p. 4-10 .
[2] Bhattacharya, P.(2011), "Weibull Distribution for Estimating the Parameters", Kolaghat India .
[3] Hung, W.L. (2001), 'Weighted least-squares estimation of the shape parameter of the Weibull distribution', Qual Reliab. Engng. Int., 17, 467-469.
[4] Labban, J.A.(2011), "Approximation of Scale Parameter of Inverted Gamma Distribution by TOM Modified". Vol. (1), No. (1), PP. -8.
[5] Labban, J.A.(2013),"Estimation of Weibull distribution Parameters with Complete Data Using T.O Method", Journal of Science of Computer and Mathematic, Vol. 5,NO.2,PP 123-129.
[6] Pasha, G.R et al.(2006), "Empirical Analysis of The Weibull Distribution for Failure Data, Journal of Statistics, Vol. 13, No. 1. PP. 33-45,.

مجلة الادارة والاقتصاد / السنة – 42 العدد 122 /2019
ISSN : 1813-6729 http://doi.org/10.31272/JAE.42.2019.122.30