مقارنة طرائق تقدير معلمات توزيع لابلاس الغير متماثل باستعمال دالة خسارة التربيعية وطريقة الإمكان الأعظم

أسماء خميس راضي / الباحثة / asmaaq2230012@gmail.com
أ.م. د ابتسام كريم عبدالله / **جامعة بغداد / كلية الإدارة والاقتصاد**
ekabdullah@coadec.uobaghdad.edu.iq

P: ISSN : 1813-6729
E : ISSN : 2707-1359
http://doi.org/10.31272/JAE.44.2021.130.13

تأريخ أستلام البحث : 2021/9/12 **مقبول للنشر بتأريخ : 2021/10/17**

المستخلص :
ان توزيع لابلاس الغير متماثل (AL) له دور أساسي ومهم في تطوير الرياضيات والاحصاء وتطبق خصائصه في المجال المالي ، ان الهدف الرئيسي لهذا البحث هو الحصول على مقدري بيز لمعلمتي الالتواء (k) والقياس (σ) لتوزيع (AL) تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية ، بافتراض دالتي أسبقية كاما والأسي لكل من معلمتي الالتواء والقياس على التوالي .حيث ان مقدرات الإمكان الأعظم وتقريب ليندلي تم استخدامها بكفاءة في التقدير البيزي .استناداً الى طريقة المحاكاة لتوليد عينات عشوائية بأربعة احجام عينات مختلفة (n=15,30,60,100) وبتكرار قدره L=1000 مع اخذ قيم افتراضية للمعلمتين k, σ وقيم أولية ل a, b ,c، بالاعتماد على متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) . حيث تمت المقارنة بين دالة خسارة الخطأ التربيعية وطريقة الامكان الأعظم ، حيث أظهرت النتائج أن مقدر بيز لمعلمتي الالتواء والقياس تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية أفضل من طريقة الإمكان الأعظم .
المصطلحات الرئيسية للبحث : توزيع لابلاس الغير متماثل ، مقدر دالة الإمكان الأعظم ،دالة خسارة الخطأ التربيعية ،تقريب ليندلي .

مجلة الادارة والاقتصاد
العدد 130 / كانون الاول/ 2021
الصفحات : 177-189

* بحث مستل من رسالة ماجستير

1- المقدمة Introduction

يعرف الالتواء هو درجة التماثل او البعد عن تماثل لتوزيع ما اذا كان المنحني التكراري لتوزيع ما له ذيل اكبر الى اليمين يقال ان التوزيع ملتوي لليمين او يعرف بالالتواء الموجب او اذا كان لتوزيع له ذيل اكبر الى اليسار يقال ان التوزيع ملتوي لليسار او يعرف بالالتواء السالب والتوزيعات الملتوية نوعين أولهما عندما يكون التوزيع ملتويا التواء موجب او التواء الى جهة اليمين وذلك في الحالة التي تمتد فيها الفئات التي مراكزها تزيد على قيمة الوسط الحسابي الى مسافة أطول من امتداد الفئات التي يكون قيم مراكزها اقل من قيمة الوسط الحسابي أي ان منحني التوزيع يمتد الى الجهة الواقعة بعد قيمة الوسط الحسابي الى مسافة أطول من امتداد جزئه الواقع قبل قيمة الوسط الحسابي ، وثانياَ عندما يكون امتداد منحني في جهة يمين الوسط الحسابي اقل من امتداده في جهة اليسار يكون الالتواء سالبا او الالتواء جهة اليسار ،أي ان عدد الفئات التي تقع قيم مراكزها قبل الوسط الحسابي اكبر من عدد الفئات التي تقع قيمها بعد قيمة الوسط الحسابي .

ان وجود المشاهدات الشاذة او المتطرفة هي احد المسببات في تمدد احد طرفي التوزيع ،حيث يعد توزيع لابلاس الغير متماثل هو واحد من التوزيعات الملتوية حيث تظهر أهمية هذا التوزيع في كون مجاميع البيانات المالية تمتاز بعدم التماثل والقمة الحادة عند نقطة الأصل وكثافة الذيل مقارنة مع توزيع لابلاس الاعتيادي ويستعمل في المجال المالي وتطبق خصائصه على العديد من الظواهر الاقتصادية والاجتماعية ، لذا فأن هذه الخصائص تبين مقدار الحاجة الماسة الى نماذج تكون بعيدة عن مجال النماذج الطبيعية [9] .وكذلك يعتبر من التوزيعات الهندسية المستقرة متعددة المتغيرات الذي ليس له رصيد كافي حول نقطة الأصل وهو يظهر في نماذج البيانات المالية [8] . في عام (2000) درس الباحث [KOZUBOWSKI, T.J ., et al.] توزيع لابلاس الغير متماثل

(Asymmetric Laplace) وقدموا الخصائص الرئيسية له ، اذ حصلوا على اشكال وصيغ صريحة لكل من دوال pdf , cdf لتوزيع لابلاس الغير متماثل بالإضافة الى انهم اشتقوا صيغ صريحة وخصائص تقاربية بالنسبة لمعلمات توزيع (AL) بطريقتي الإمكان الأعظم والعزوم . وطبقوا هذا التوزيع في المجال المالي [10] .

في عام (2016) وصف الباحثان [Hossianzadeh, A., & Zare, K.,] توزيع لابلاس (AL) هو توزيع مرن بسيط يمكن تطبيقها على بيانات تعداد التوزيع وتم تقدير معلمات توزيع لابلاس (AL) من خلال مقدر بيز ومقدر دالة الإمكان الأعظم واظهرت النتائج ان مقدر بيز هو الأفضل ، ويتميز هذا التوزيع بأشكال مغلقة وبسيطة هما دالة الاحتمالية ، ودالة التوزيع ، التوقع الرياضي ، التباين ، والهدف من دراسة التوزيع هو تقديم مقدر بيز لتقدير المعلمات [5] . في عام (2017) قام الباحث [Hasan ,M. R.,& et al.] بتقدير معلمة التوزيع في ظل وجود دوال خسارة مختلفة والمقارنة فيما بينهم وكذلك مع مقدر دالة الإمكان الأعظم (MLE). واستخدموا دوال خسارة متماثلة وغير متماثلة ، كذلك قاموا باستعمال المحاكاة لمعرفة متوسط مربعات الخطأ (MSE) ، وبالتالي وجدوا ان مقدر بيز افضل من طريقة الإمكان الأعظم [4] .

2- هدف البحث Objective of Search

يهدف البحث الى تقدير معلمات توزيع لابلاس الغير متماثل وباستعمال طرائق التقدير مثل طريقة الإمكان الأعظم والطريقة البيزية بالاعتماد على دالة خسارة الخطأ التربيعية والمقارنة بين هذه الطرائق وصولاَ الى الطريقة الأفضل وباستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (Integral Mean Square Error) من خلال نتائج المحاكاة .

3- الجانب النظري

1-3 توزيع لابلاس الغير متماثل Asymmetric Laplace distribution(AL)

يعد توزيع لابلاس الغير متماثل (Asymmtric Laplace) من التوزيعات الحدية بالنسبة لمتغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة التوزيع وذات تباين محدد [10] في مجال تصميم النماذج العشوائية وبالاخص جانب التطبيقات المالية يعتبر توزيع لابلاس الطبيعي (المتماثل) وتعميماته الملتوية بمثابة المنافسين بالنسبة للتوزيعات المتماثلة الأخرى [6] . ويمكن تعريف دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) له كما في الاتي [9] :–

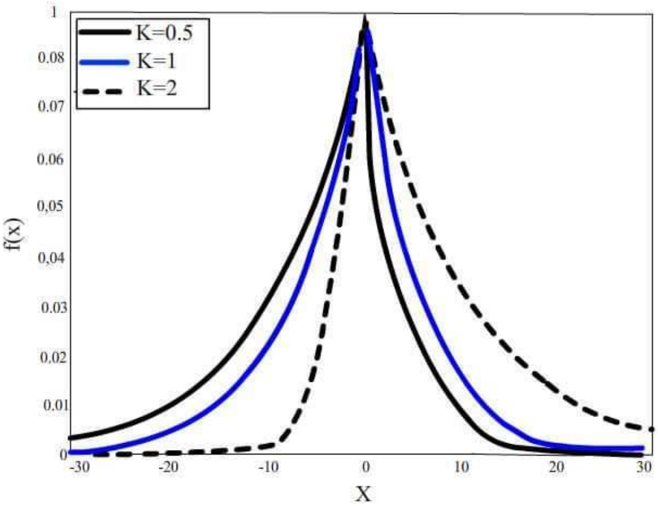
$$p_{\sigma,\mu}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\,\frac{k}{1+k^2}\begin{cases} e^{\left(-\frac{\sqrt{2}k}{\sigma}x\right)} & , \quad x \ge 0 \\ e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma k}x\right)} & , \quad x < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

k : معلمة الالتواء (Skewness Parameter)

σ : معلمة القياس (Scale parameter)

الشكل (1) يوضح دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع (AL)وذلك باختيار اكثر من قيمة ل (k) حيث يوضح ان قيمة (k=1) فهذا يجعل من دالة الـ pdf لتوزيع لابلاس الغير متماثل (AL) تختزل الى توزيع لابلاس

المتماثل . في حين اذ كانت قيمة (k<1) فهذا يعطي دالة pdf لتوزيع AL ملتوي لليسار (Left Skewed) كما في المنحني ذو اللون الاسود مقارنة مع المنحني ذو اللون الازرق الذي يمثل توزيع لابلاس (المتماثل) وفي هذه الحالة يكون التواء سالب، اما اذا كانت قيمة (k>1) فهذا يعطي دالة pdf لتوزيع AL ملتوي لليمين (Right Skewed) كما موضح في المنحني ذو اللون الأسود النقطي مقارنة مع توزيع لابلاس لاعتيادي (المتماثل) ويعتبر التواء موجب، من الجدير بالذكر ان جانب الالتواء يكون ذو ذيل اطول من الجانب الاخر [7] .

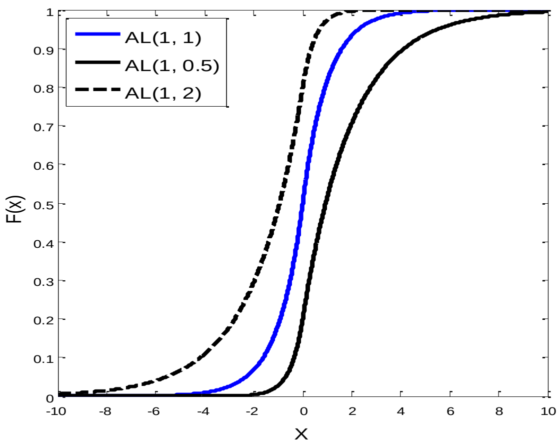


شكل (1) دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع لابلاس الغير متماثل AL

بالنسبة لدالة التوزيع التراكمية (cdf) بالنسبة لتوزيع AL (σ, k) من خلال المعادلة الاتية [9] :-

$$F_{\sigma,\mu}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{1+k^2}\, e^{\left(-\frac{\sqrt{2}k}{\sigma}x\right)}, & x > 0 \\ \dfrac{k^2}{1+k^2}\, e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma k}x\right)}, & x \le 0 \end{cases} \qquad (2)$$

الشكل (2) يوضح دالة التوزيع التراكمية منحني هذه الدالة بقيمة ثابتة بالنسبة معلمة القياس $(\sigma = 1)$ وقيمة متغيرة بالنسبة لمعلمة الالتواء (k). اذ ان المنحني باللون الازرق يبين دالة الـ cdf بالنسبة لتوزيع لابلاس المتماثل وذلك لان قيمة k=1 . في حين ان المنحني ذو اللون الاسود يبين دالة الـ cdf بالنسبة لتوزيع AL ملتوي لليسار وذلك لان قيمة $k < 1$ (الجانب الايسر ذو ذيل اطول من الجانب الاخر). اما اذا كانت قيمة $k > 1$(الجانب الايمن ذو ذيل اطول من الجانب الاخر) فهذا يعطي دالة cdf بالنسبة لتوزيع AL ملتوي لليمين وهذا ما بينه المنحني ذو الأسود النقطي [7] :–



شكل (2) الدالة التراكمية للتوزيع لابلاس الغير متماثل

2-3 تقدير معلمات توزيع لابلاس الغير متماثل (ALD):-

سنتطرق في هذا الجزء الى طريقة الامكان الاعظم و اسلوب بيز بالنسبة لتقدير معلمات توزيع (AL) لابد من كون الصيغ التقديرية الناتجة لكل معلمة من معلمات التوزيع في هذه الطرائق تمتلك صيغة صريحة وتحمل خصائص المقدر الجيد.

1-2-3 طريقة الامكان الاعظم Maximum Likelihood method (MLE)

تعتمد طريقة الامكان الاعظم في تقدير قيم معلمات توزيع معين على جعل دالة الامكان الاعظم في نهايتها العظمى. لغرض الحصول على مقدرات الامكان الاعظم لهذا المعلمات، فضلا عن خاصية مهمة جداً وهي خاصية الثبات من الخصائص الجيدة لهذه الطريقة مما جعلها ذات كفاءة عالية تهدف الى جعل دالة الامكان للمتغيرات العشوائية أعظم ما يمكن ، والتي يمكن كتابتها كالاتي:-[11,2]

$$L(x_1, \ldots, x_n\,;\ \mu, k, \sigma) = \frac{2^{n/2}}{\sigma^n}\,\frac{k^n}{(1+k^2)^{\,n}}\,exp\left\{-\frac{\sqrt{2}k}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(xi-\mu)^{\,+} - \frac{\sqrt{2}}{k\sigma}\sum_{i=1}^{n}(xi-\mu)^{\,-}\right\}$$
(3)

$$L(x_1, \ldots, x_n\,;\ \mu, k, \sigma) = \frac{2^{n/2}}{\sigma^n}\,\frac{k^n}{(1+k^2)^{\,n}}\exp\{-\frac{\sqrt{2}n}{\sigma}\left(k\alpha(\mu) + \frac{\beta(\mu)}{k}\right)\}$$

حيث أن الجزء الموجب من دالة التوزيع $AL(\sigma, k)$ يمكن كتابتها كالاتي :-

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^{\,+}$$

الجزء السالب هو كالآتي :-

$$\beta(\mu) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\,x_i-\mu)^{\,-}$$

وبأخذ للوغاريتم لطرفي المعادلة (3) يكون لدينا الاتي :

$$\mathrm{Ln\,L} = \frac{\mathrm{n}}{2}\mathrm{Ln2} - \mathrm{nLn\sigma} + \mathrm{n\,Ln}\frac{k}{1+k^2} - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\left[\mathrm{k}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}(\mathrm{xi}-\ \mu)^{\,+} + \frac{1}{\mathrm{k}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}(\mathrm{xi}-\mu\,)^{\,-}\right]$$
(4)

- هناك حالات تتضمن مقدرات دالة الإمكان الأعظم لأيجاد تقدير معلمات التوزيع بمتوسط صفر وتباين طبيعي مقارب حيث يمكن كتابتها كالآتي :-

1) عندما تكون معلمة الموقع غير معلومة(μ) وبالنسبة لمعلمتي الالتواء والقياس معلومات (σ, k) :-

$$\hat{\mu}_n = X_{r:n} \qquad (5)$$

عندما تكون قيمة

$$\mathrm{j(n)}=[[\frac{nk^2}{(1+k^2)}]] + 1$$

قيمة التباين لتقدير معلمة الموقع هو كالاتي :-

$$\mathrm{Var} = \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

2) عندما تكون معلمة القياس غير معلومة(σ) وبالنسبة لمعلمتي الالتواء والموقع معلومات (μ, k) :

من خلال دالة الامكان الاعظم نجد معلمة القياس(σ)

$$\mathrm{Q(\sigma)} = \frac{2^{n/2}}{\sigma^n}\,\frac{k^n}{(1+k^2)^{\,n}}\exp\{-\frac{\sqrt{2}n}{\sigma}\left(k\alpha(\mu) + \frac{\beta(\mu)}{k}\right)\}$$

$$\hat{\sigma}_n = \frac{\sqrt{2}}{n}\{k\,\alpha(\mu) + \frac{\beta(\mu)}{k}\}$$

قيمة التباين لهذه الحالة(σ^2)

3) عندما تكون معلمة الالتواء غير معلومة(k) وبالنسبة لمعلمتي القياس والموقع معلومات (μ, σ) :–

$$\hat{k}_n = \frac{1-2k^2}{(1+k^2)} + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\left[\alpha(\mu)k - \frac{\beta(\mu)}{k}\right] = 0$$

$$\alpha(\mu) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^{\,+}$$

$$\beta(\mu) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^{-}$$

قيمة التباين لهذه الحالة $\left(\sigma_k^2 = \frac{k^2(1+k^2)^2}{(1+k^2)^2 + 4k^2} \right)$

4)عندما تكون معلمتي الموقع والقياس غيرمعلومات(σ, μ) وبالنسبة لمعلمة الالتواء(k) تكون معلومة :-

نجد دالة الامكان الاعظم لكل من معلمتي القياس والموقع (μ, σ):-

$$Q(\mu, \sigma) = -n\mathrm{Ln}\sigma - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\left(k\alpha(\mu) + \frac{\beta(\mu)}{k}\right)$$

(6)

$$\hat{\mu}_n = X_{j(n):n}$$

$$\hat{\sigma}_n = \sqrt{2}k\alpha(\hat{\mu}_n) + \frac{\sqrt{2}}{k}\beta(\hat{\mu}_n)$$

قيمة التباين لهذه الحالة هي $\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2} & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$

5)عندما تكون معلمتي الالتواء والقياس غيرمعلومات(σ, k) وبالنسبة لمعلمة الموقع(μ) تكون معلومة :-

نجد دالة الامكان الاعظم لكل من معلمتي القياس والالتواء (k, σ):-

$$Q(k,\sigma) = Ln\, k - Ln(1+k^2) - Ln(\sigma) - \left[k, {}^{1}/_{k}\right]\bar{Z}^{\,n} / \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) \quad (7)$$

حيث$(\bar{Z}^{\,n})$ هو عبارة عن متجه عشوائي يحتوي على جزئين من دالة التوزيع هما الجزء الموجب والجزء السالب يعرف باسم نظرية الحد المركزي

$$\bar{Z}^{\,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z^i \Rightarrow \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_1^i \quad , \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_2^i\right]$$

- هناك حالتين تتضمن معلمة الموقع (μ)

1) $\mu \le x_{1:n}$

$$(x_i - \mu)^{+} = (x_i - \mu)^{+} \quad , (x_i - \mu)^{-} = 0 \quad , i = 1,2,\dots,n$$

$$\bar{Z}_1^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_1^{(i)} \quad \Rightarrow = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(xi - \mu)^{+} = \bar{x}_n - \mu$$

$$\bar{Z}_2^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_2^{(i)} \quad \Rightarrow \quad = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(xi - \mu)^{-} = 0$$

تتضمن الجزء الموجب من دالة الامكان الاعظم لمعلمتي الالتواء والقياس (σ, k) لدالة التوزيع $AL(\sigma, k)$

$$Q(k,\sigma) = Lnk - Ln(1+k^2) - Ln(\sigma) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}k(\bar{x}_n - \mu) \quad (8)$$

وبالاشتقاق بالنسبة لمعلمة القياس (σ) لمعادلة رقم (8) يكون كالاتي :-

$$\frac{\partial Q(k,\sigma)}{\partial\sigma} = -\frac{1}{\sigma} + \frac{\sqrt{2}}{\sigma^2}k(\bar{x}_n - \mu)$$

وعليه فأن الجزء الموجب هو $\sigma < \sigma(k)$, والجزء السالب هو $\sigma > \sigma(k)$

$$\sigma(k) = \sqrt{2}k(\bar{x}_n - \mu)$$

$$Q(k,\sigma) \le Q(k, \sigma(k)) = -Ln(1+k^2) - Ln\sqrt{2} - Ln(\bar{x}_n - \mu) - 1$$

$$\lim_{k\to 0} Q(k, \sigma(k)) = -Ln\sqrt{2} - Ln(\bar{x}_n - \mu) - 1 \quad (9)$$

2) $\mu >= x_{n:n}$

$$\bar{Z}_1^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_1^{(i)} \quad \Rightarrow = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^{+} = 0$$

$$\bar{Z}_2^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_2^{(i)} \quad \Rightarrow = (\mu - \bar{x}_n)$$

$$\sigma(k) = \sqrt{2}k^{-1}\,(\mu - \bar{x}_n)$$

حيث أن دالة$Q(k,\sigma(k))$ تتزايد بدقة بفترة $(0,\infty)$ وبأخذ للوغاريتم لها كالاتي :-

$$Q(k,\sigma) \le Q\big(k,\sigma(k)\big) = Ln\frac{k^2}{1+k^2} - Ln\sqrt{2} - Ln(\mu - \bar{x}_n) - 1$$

$$\lim_{k\to\infty} Q\big(k,\sigma(k)\big) = -Ln\sqrt{2} - Ln(\mu - \bar{x}_n) - 1$$

(10)

$$\hat{k}_n =)\sqrt[4]{\frac{\beta(\mu)}{\alpha(\mu)}}$$

$$\hat{\sigma}_n = \sqrt{2}\,\sqrt[4]{\alpha(\mu) +}\ \sqrt[4]{\beta(\mu)}\ \times\ (\sqrt{\alpha(\mu)} + \sqrt{\beta(\mu)}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma^2}{8}(1+k^2)^{\,2}\begin{bmatrix} a & c \\ & b \end{bmatrix}$$ قيمة التباين لهذه الحالة

$$a = \frac{1}{\sigma^2} \qquad , \qquad c = \frac{1}{k\sigma}\,\frac{1-k^2}{1+k^2} \qquad , \qquad c = \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{4k^2}{(1+k^2)^{\,2}}\right)$$

6)عندما تكون معلمات الثلاثة الالتواء والقياس والموقع(μ, σ, k) غير معلومات حيث يمكن تقديرهما كما يلي :-

$$Q(\mu,k,\sigma) = -Ln\sigma + Ln\frac{k}{1+k^2} - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\left\{k\alpha(\mu) + \frac{1}{k}\beta(\mu)\right\}$$

حيث نستخرج مقدرات المعلمات على ضوء المعادلات

بفرض ان معلمة الموقع $(\hat{\mu}_{MLE})$ نجعلها حول نقطة الأصل

$$\hat{\mu}_{MLE} = 0$$

$$\hat{k}_{MLE} = \sqrt[4]{\beta\ (\hat{\mu}_n)}/\sqrt[4]{\alpha(\hat{\mu}_n)}$$

(11)

$$\hat{\sigma}_{MLE} = \sqrt{2}\,\sqrt[4]{\alpha(\hat{\mu}_n)}\,\sqrt[4]{\beta(\hat{\mu}_n)}\,\left(\sqrt{\alpha(\hat{\mu}_n)} + \sqrt{\beta(\hat{\mu}_n)}\right) \qquad (12)$$

2-2-3 مقدر بيز Bayes Estimation

ان نظرية بيز ترجع الى اواسط القرن الثامن عشر، ويعتبر اسلوب بيز من الاساليب المهمة، اذ أهتم به العديد من الاحصائيين الكبار وأستعملوه في مجالات عديدة. ان هذا الاسلوب في التقدير يفترض ان المعلمة المراد تقديرها تكون بمثابة متغير عشوائي وفي حال تقديرها لابد من توفر معلومات أولية مسبقة عنها بتوزيع احتمالي يسمى التوزيع الاولي (Prior distribution) [3,1] :-

1-2-2-3 دالة الكثافة اللاحقة المشتركة باستعمال دالتي اسبقية توزيع كاما والتوزيع الاسي:-

للحصول على تقدير معلمتي الالتواء والقياس لتوزيع لابلاس الغير متماثل نفترض لمعلمة الالتواء (k) لها توزيع اولي prior distirbution $\pi_1(.)$ يتبع توزيع $k \sim \Gamma(a,b)$

وايضاً نفترض لمعلمة القياس(σ) لها توزيع اولي $\pi_2(.)$ يتبع توزيع $\sigma \sim \exp(c)$ حيث يكونان مستقلان عن بعضهما

التوزيع الاولي لمعلمة الالتواء (k) وهو كالاتي :-

$$\pi_1\,(k) = \frac{(a)^{\,b}\,(k)^{\,a-1}\,e^{-kb}}{\Gamma(a)}\, a > 0\ \ ,\ b > 0 \qquad (13)$$

حيث ان b ,a تمثل معلمتي الالتواء والقياس على التوالي

التوزيع الاولي لمعلمة القياس (σ) وهو كالاتي :

$$\pi_2(\sigma) = C\,e^{-c\sigma} \qquad c > 0 \quad ,\sigma \ge 0 \qquad (14)$$

حيث ان C تمثل معلمة القياس

وبدمج التوزيعات الاولية لكل من معادلة (13) والمعادلة (14) مع معادلة (3) حيث نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة كالاتي:-

$$J(x_1, x_2 \ , \ldots \ , x_n \,; \sigma, k) = L(x_1 \,, x_2 \,, \ldots, x_n; \ \sigma, k)\ \pi_1(k)\ \pi_2(\sigma)$$
$$= \frac{2^{n/2}}{\sigma^n} \left(\frac{k}{1+k^2}\right)^n \ e^{-\frac{\sqrt{2}\,k}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} xi} \ . \frac{(b)^{a}\,(k)^{a-1}\ e^{-bk}}{\Gamma(a)} .C\ e^{-c\sigma}$$

وعليه فأن دالة الكثافة اللاحقة المشتركة لمعلمتي الالتواء والقياس (k,σ) وهي كالتالي :

$$h(\sigma, k|\ x_1 \,, \ldots, x_n) = \frac{L(x_1,x_2,\ldots\ ,x_n;\sigma,k)\ \ \pi_1(k)\ \pi_2(\sigma)}{\int_0^\infty \int_0^\infty L(x_1\,,x_2\,,\ldots,x_n\,;\sigma,k)\,\pi_1(k)\,\pi_2(\sigma)\ \ dk\,d\sigma}$$
$$= \frac{\frac{2^{n/2}}{(\sigma)^n}\left(\frac{k}{1+k^2}\right)^n e^{\frac{-\sqrt{2}k}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} xi} . \frac{(b)^{a}\ (k)^{a-1}\ e^{-bk}}{\Gamma(a)} .C\ e^{-c\sigma}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{2^{n/2}}{(\sigma)^n}\left(\frac{k}{1+k^2}\right)^n \ e^{-\frac{\sqrt{2}\,k}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} xi} . \frac{(b)^{a}\,(k)^{a-1}\ e^{-bk}}{\Gamma(a)} .C\ e^{-c\sigma}\ dk\,d\sigma}$$

2-2-2-3 طريقة تقدير تقريب ليندلي

Lindley`s Approximation Estimator Method

تم أقتراح اجراء أسلوب تقريب ليندلي لأول مرة عام (1980) لتقريب نسبة التكاملات ،لايجاد مقدرات بيز بالنسبة لمعلمتي الالتواء(k) والقياس (σ) لتوزيع (AL) بواسطة استعمال أسلوب تقريب ليندلي وكما يلي[13] :-

$$I = u(k,\sigma) + \frac{1}{2}\ (u_{11}\sigma_{11} + u_{22}\sigma_{22}) + p_1 u_1 \sigma_{11} + p_2 u_2 \sigma_{22} + \frac{1}{2}(L_{30} u_1 \sigma_{11}^2) + L_{03} u_2 \sigma_{22}^2 + (L_{12} u_1 + L_{21} u_2)\sigma_{11}\sigma_{22})$$

$$E(k|\underline{x}) \approx \hat{k} + P_1 u_1 \sigma_{11} + \frac{1}{2}(L_{30} u_1 \sigma_{11}^2) + \frac{1}{2}(L_{12} u_1 \sigma_{11} \sigma_{22}) \qquad (15)$$

3-2-2-3 مقدر بيز باستعمال دالة الخسارة الخطأ التربيعية

Squared Error Loss Function Using Bayes Estimation

تعتبر دالة خسارة الخطأ التربيعية (Square error loss function) من اكثر دوال الخسارة شيوعاً واستعمالاً وهي دالة متماثلة والصيغة الرياضية لكل من معلمتي الالتواءk والقياسσ لها كالاتي [12] :-

$$L(\hat{k}, k) = (\hat{k}, k)^{\,2} \qquad \ldots\ldots \quad L(\hat{\sigma}, \sigma) = (\hat{\sigma}, \sigma)^{\,2}$$

وبالتالي فأن مقدر بيز لمعلمتي الالتواء والقياس على التوالي تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية ($\hat{k}_s$) ، ($\hat{\sigma}_s$) كالاتي :-

$$\hat{k}_s = E(k|\underline{x}) \qquad (16)$$
$$\hat{\sigma}_s = E(\sigma|\underline{x}) \qquad (17)$$

1) مقدر بيز لمعلمة الالتواء (k) باستعمال دالة الخسارة الخطأ التربيعية:-

لحصول على مقدر بيز لمعلمة الالتواء (k) تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية نفترض ان:-

$$u(k,\sigma) = k$$
$$E(\ k\ |\underline{x}) = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty k\ L(x_1,x_2,..,x_n)\ h_1(k)\ h_2(\sigma)\ dk\ \ d\sigma}{\int_0^\infty \int_0^\infty L(x_1,x_2,\ldots,x_n) h_1(k)\ h_2(\sigma)\ dk\ d\sigma}$$

سيتم استعمال أسلوب تقريب ليندلي (The Lindley Approximation) لايجاد مقدر معلمة الالتواء (k) كما موضح بالمعادلة رقم (15) :-

ان دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لكل من معلمتي الالتواء والقياس (k, σ) تكتب بالصيغة الاتية :-

$$(\sigma, k) = \frac{(b)^{a}\ (k)^{a-1}\ e^{-bk}}{\Gamma(a)} .\, Ce^{-c\sigma}\ \pi$$
$$Ln\ \ \pi(\sigma, k) = aLn(b) + (a-1)Lnk - bk + Ln\ (c) - c\sigma$$
$$P_1 = \frac{\partial P}{\partial k} = \frac{a-1}{k} - b$$
$$P_2 = \frac{\partial P}{\partial \sigma}\ \ = -c$$

عندما

$$Lij = Ln\ L\ f(x, \sigma, k) \qquad , \qquad i,j = 0,1,2,3$$
$$Ln\ L\ f(x,\sigma, k) = \frac{n}{2}Ln2 - nLn\sigma + nLnk - nLn(1+k^2) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(k\sum_{i=1}^{n} xi + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} xi)$$

(L_{ij}) حيث ان المتغير (i) يمثل المشتقة بالنسبة للمعلمة الالتواء (k) مع المتغير (j) يمثل المشتقة بالنسبة للمعلمة القياس (σ)

أي ان (L_{12}) يمثل المشتقة الأولى بالنسبة لمعلمة (k) مع المشتقة الثانية بالنسبة لمعلمة (σ)

$$L_{12} = -\frac{2\sqrt{2}\,n\,x}{\sigma^3} - \frac{2\sqrt{2}\,nx}{k^2\sigma^3}$$

اما (L_{03}) يمثل المشتقة الثالثة بالنسبة لمعلمة القياس (σ) وكما يلي :

$$L_{03} = -\frac{2n}{\sigma^3} + \frac{6\sqrt{2}\,K\,n\,x}{\sigma^4} - \frac{6\sqrt{2}\,nx}{\sigma^4 K}$$

يمثل (L_{30}) المشتقة الثالثة بالنسبة لمعلمة الالتواء (k) وكما يأتي :

$$L_{30} = \frac{2n}{k^3} - \frac{12nk}{(k^2+1)^2} + \frac{16\,nk^3}{(k^2+1)^3} - \frac{6\sqrt{2}\,n\,x}{\sigma\,k^4}$$

يمثل (L_{20}) المشتقة الثانية بالنسبة لمعلمة الالتواء (k) وكما يأتي .

$$L_{20} \Rightarrow k^2 = \frac{\partial^2 Ln\,L(\sigma,k)}{\partial k^2} = -\frac{n}{k^2} - \frac{2n}{k^2+1} + \frac{4nk^2}{(k^2+1)^2} + \frac{2\sqrt{2}\,nx}{\sigma k^3}$$

اما (L_{02}) يمثل المشتقة الثانية بالنسبة لمعلمة القياس (σ) وكما يلي :-

$$L_{02} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\partial^2 Ln\,L(\sigma,k)}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{2\sqrt{2}knx}{\sigma^3} + \frac{2\sqrt{2}nx}{\sigma^3 k}$$

اما (σ_{11}) يمثل مقلوب المشتقة الثانية بالنسبة لمعلمة الالتواء(k) وكما يلي :-

$$\sigma_{11} = -\frac{1}{L_{20}} = \frac{k^3(k^2+1)^2\sigma}{n\left(2\sqrt{2}k^4x + 4\sqrt{2}k^2x - 4\sigma k^3 + 2\sqrt{2}x - \sigma k\right)}$$

اما (σ_{22}) يمثل مقلوب المشتقة الثانية بالنسبة لمعلمة القياس (σ) وكما يلي :-

$$\sigma_{22} = -\frac{1}{L_{02}} \Rightarrow \frac{\sigma^3 k}{n\left(2\sqrt{2}\,k^2\,x - 2\sqrt{2}\,x - \sigma k\right)}$$

$$u_1 = \frac{\partial u(\sigma,k)}{\partial k} = 1$$

$$u_{11} = \frac{\partial^2 u(\sigma,k)}{\partial k^2} = 0$$

$$u_2 = \frac{\partial u(\sigma,k)}{\partial \sigma} = 0$$

$$u_{22} = \frac{\partial u(\sigma,k)}{\partial \sigma^2} = 0$$

بتعويض المعادلات في صيغة قانون تقريب ليندلي في معادلة رقم (15) كالاتي

$$E(k|\,\underline{x}) \approx \hat{k} + \left(\frac{a-1}{\hat{k}} - b\right)\left(\frac{\hat{k}^3(\hat{k}^2+1)^2\hat{\sigma}}{n\left(2\sqrt{2}\hat{k}^4x + \hat{k}^5\,\hat{\sigma} + 4\sqrt{2}\hat{k}^2x - 4\,\hat{\sigma}\hat{k}^3 + 2\sqrt{2}x - \hat{\sigma}\hat{k}\right)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2n}{\hat{k}^3} - \frac{12n\hat{k}}{(\hat{k}^2+1)^2} + \frac{16\,n\hat{k}^3}{(\hat{k}^2+1)^3} - \frac{6\sqrt{2}\,n\,x}{\hat{\sigma}\hat{k}^3}\right)\left(\frac{\hat{k}^3(\hat{k}^2+1)^2\hat{\sigma}}{n\left(2\sqrt{2}\,\hat{k}^4x + \hat{k}^5\hat{\sigma}\;4\sqrt{2}\hat{k}^2x - 4\hat{\sigma}\,\hat{k}^3 + 2\sqrt{2}x - \hat{\sigma}\,\hat{k}\right)}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{2\sqrt{2}\,n\,x}{\hat{\sigma}^3} - \frac{2\sqrt{2}\,nx}{\hat{k}^2\;\hat{\sigma}^3}\right)\left(\frac{\hat{k}^3(\hat{k}^2+1)^2\hat{\sigma}}{n\left(2\sqrt{2}\,\hat{k}^4x + \hat{k}^5\hat{\sigma}\;4\sqrt{2}\hat{k}^2x - 4\hat{\sigma}\,\hat{k}^3 + 2\sqrt{2}x - \hat{\sigma}\,\hat{k}\right)}\right)\left(\frac{\hat{\sigma}^3\,\hat{k}}{n\left(2\sqrt{2}\,\hat{k}^2\,x - 2\sqrt{2}\,x - \hat{\sigma}\,\hat{k}\right)}\right) \qquad (18)$$

بتعويض معادلة (18) في معادلة رقم (16) وكما يلي :-

($\hat{k}$)هي مقدر دالة الامكان الأعظم

$$\hat{k}_s \approx E(k|\,\underline{x})$$

2) مقدر بيز لمعلمة القياس (σ) باستعمال دالة خسارة الخطأ التربيعية

لحصول على مقدر بيز لمعلمة القياس تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية نفترض ما يلي :-

$$u(k,\sigma) = \sigma$$

$$u_1 = \frac{\partial u(\sigma,k)}{\partial k} = 0$$

$$u_{11} = \frac{\partial^2 u(\sigma,k)}{\partial k^2} = 0$$

$$u_2 = \frac{\partial u(\sigma,k)}{\partial \sigma} = 1$$
$$u_{22} = \frac{\partial u(\sigma,k)}{\partial \sigma^2} = 0$$

وبتعويض المعادلات نطبق قانون (تقريب ليندلي) لمعلمة القياس σ

$$E(\sigma\,|\underline{x}) \approx \hat{\sigma} + p_2 u_2 \sigma_{22} + \frac{1}{2}\left(L_{03} u_2 \sigma_{22}^2\right)$$

$$E(\sigma|\underline{x}) \approx \hat{\sigma} + (-c)\left(\frac{\sigma^3 k}{n\left(2\sqrt{2}\,k^2\,x - 2\sqrt{2}\,x - \sigma k\right)}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{2n}{\sigma^3} + \frac{6\sqrt{2}\,K\,n\,x}{\sigma^4} - \frac{6\sqrt{2}\,nx}{\sigma^4 K}\right)\left(\frac{\sigma^3 k}{n\left(2\sqrt{2}\,k^2\,x - 2\sqrt{2}\,x - \sigma k\right)}\right)^2 \qquad (19)$$

وبتعويض معادلة (19) في معادلة رقم(17) وكالاتي:

$$E(\sigma|\underline{x}) \approx \hat{\sigma}_s$$

حيث ان $\hat{k},\hat{\sigma}$ هي مقدرات دالة الامكان الاعظم

4- الجانب التجريبي

تم أجراء البحث باستخدام المحاكاة لغرض المقارنة بين طرائق التقدير تجريبيا ، حيث يتميز هذا الاسلوب بالمرونة ويوفر الكثير من الجهد والوقت حيث يتم توليد البيانات نظريا دون الحصول عليها عمليا دون الاخلال بدقة النتائج.

1-4 مراحل تجربة المحاكاة

1- تحديد القيم الافتراضية : لقد تم اختيار اربعة احجام للعينات هي (15، 30 ، 60، 100) بقيم معلمات افتراضية كما مبينة بالجدول التالي:

جدول (1) يوضح حجوم العينات ومعلمات التوزيع للمحاكاة

معلمة σ			معلمة k			احجام العينات
1	0.5	0.1	2	1	0.5	15
1	0.5	0.1	2	1	0.5	30
1	0.5	0.1	2	1	0.5	60
1	0.5	0.1	2	1	0.5	100

2- توليد البيانات : وفيها يتم توليد البيانات التي تخضع لتوزيع لابلاس الغير متماثل وفقا لكل قيمة من قيم المعلمات الافتراضية و حجم العينة المحدد في الخطوة (1) ويتم من خلال

a) توليد ارقام عشوائية Ui تتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة (0،1)

$$U \sim U(0,1) \qquad i \;\square\square 1,\ldots,n \qquad (20)$$

b) تحويل البيانات المولدة في الخطوة (a) والتي تتبع التوزيع المنتظم الى بيانات تتبع توزيع لابلاس الغير المتماثل وباستخدام دالة التوزيع التجميعية وحسب طريقة التحويل المعكوس ينتج :

$$U = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+k^2}\, e^{\left(-\frac{\sqrt{2}k}{\sigma}x\right)}, & x > 0 \\ \frac{k^2}{1+k^2}\, e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma k}x\right)}, & x \le 0 \end{cases} \qquad (21)$$

ومن ثم نوجد قيم (x) من خلال دالة التوزيع التراكمية التجميعية

$$x = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sqrt{2}k}\left[2\,\mathrm{Ln}(k) - \mathrm{Ln}(U)\right], & x > 0 \\ \frac{k\sigma}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{Ln}(U) - \mathrm{Ln}\frac{1+k^2}{k^2}\right], & x \le 0 \end{cases} \qquad (22)$$

c) في هذه المرحلة يتم تقدير معلمات توزيع لابلاس الغير متماثل لطرائق وبالاعتماد على (xi) المولدة في الخطوة (b) ولغرض الوصول للمقدر الافضل تم الاعتماد على متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) :-

والصيغة العامة لمقدر متوسط مربعات الخطأ التكاملي لكل من معلمتي الالتواء (k) والقياس (σ) على التوالي وكما يلي :-

$$\text{IMSE}(\hat{k}) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} MSE\left[\left(\hat{k}-k\right)\right]$$

$$\text{IMSE}(\hat{\sigma}) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} MSE\left[\left(\hat{\sigma}-\sigma\right)\right]$$

ولحجم (L=1000) وبالاعتماد على برنامج (MATLAB R2010b) وكما مبين في الجدول رقم (1).

4-2 نتائج تجارب المحاكاة

من خلال اجراء تجارب المحاكاة بغية معرفة اي طريقة كانت افضل من خلال قيم معلمات (**σ** ،k) .

جدول (2) يبين نتائج IMSE لمعلمتي الالتواء k والقياس σ لتوزيع AL عندما k=2 ,0.5 ,1 و قيم σ = (1, 0.5, 0.1) على التوالي المبينة في الجدول الاتي :-

Method / N			MLE		Bayes estimation (square.Erro.loss.fun)		Best	
			IMSE(k)	IMSE(σ)	IMSE(k)	IMSE(σ)	IMSE(k)	IMSE(σ)
15	k=2	σ = 0.1	0.7700	0.1896	0.7285	0.1745	$\hat{k}_S$	$\hat{\sigma}_S$
		σ = 0.5	0.7698	4.6115	0.7387	4.4138	$\hat{k}_S$	$\hat{\sigma}_S$
		σ = 1	0.7679	16.6624	0.7267	12.8560	$\hat{k}_S$	$\hat{\sigma}_S$
	k=0.5	σ = 0.1	0.1125	0.1693	0.0123	0.0200	$\hat{k}_S$	$\hat{\sigma}_S$
		σ = 0.5	0.1171	0.2116	0.0288	0.2094	$\hat{k}_s$	$\hat{\sigma}_s$
		σ = 1	0.1124	6.6528	1.0670	15.6529	$\hat{k}_{MLE}$	$\hat{\sigma}_{MLE}$
	k=1	σ = 0.1	0.0858	0.0100	0.1585	0.0100	$\hat{k}_{MLE}$	$\hat{\sigma}_{MLE}=\hat{\sigma}_S$
		σ = 0.5	0.0857	0.2500	0.1584	0.2498	$\hat{k}_{MLE}$	$\hat{\sigma}_S$
		σ = 1	0.0855	12.3274	0.1586	8.6528	$\hat{k}_{MLE}$	$\hat{\sigma}_S$
30	k=2	σ = 0.1	0.7698	0.1668	0.7585	0.1680	$\hat{k}_S$	$\hat{\sigma}_{MLE}$
		σ = 0.5	0.7707	4.1953	0.7594	4.1809	$\hat{k}_S$	$\hat{\sigma}_S$
		σ = 1	0.7684	16.5582	0.7572	16.8553	$\hat{k}_S$	$\hat{\sigma}_{MLE}$
	k=0.5	σ = 0.1	0.0868	0.0223	0.3568	0.0225	$\hat{k}_{MLE}$	$\hat{\sigma}_{MLE}$
		σ = 0.5	0.8853	5.5522	0.4391	4.2721	$\hat{k}_s$	$\hat{\sigma}_s$
		σ = 1	2.0854	2.1819	3.6362	2.7362	$\hat{k}_s$	$\hat{\sigma}_s$
	k=1	σ = 0.1	0.0858	0.0100	0.1219	0.0100	$\hat{k}_{MLE}$	$\hat{\sigma}_S=\hat{\sigma}_{MLE}$
		σ = 0.5	0.0858	0.2500	0.1219	0.2500	$\hat{k}_{MLE}$	$\hat{\sigma}_S=\hat{\sigma}_{MLE}$
		σ = 1	0.0858	1.0000	0.1216	0.9980	$\hat{k}_{MLE}$	$\hat{\sigma}_S$
	k=2	σ = 0.1	0.7710	0.1669	0.7682	0.1672	$\hat{k}_S$	$\hat{\sigma}_{MLE}$
		σ = 0.5	0.7707	4.1690	0.7679	4.1809	$\hat{k}_S$	$\hat{\sigma}_{MLE}$
		σ = 1	0.7724	16.8524	0.7697	16.9258	$\hat{k}_S$	$\hat{\sigma}_{MLE}$

60	k=0.5	$\sigma = 0.1$	0.0786	0.1211	0.0773	0.0239	$\hat{k}_s$	$\hat{\sigma}_s$
		$\sigma = 0.5$	0.1743	0.7277	0.0150	0.6771	$\hat{k}_s$	$\hat{\sigma}_s$
		$\sigma = 1$	0.0715	2.0682	0.0739	2.1722	$\hat{k}_{MLE}$	$\hat{\sigma}_{MLE}$
	k=1	$\sigma = 0.1$	0.0858	0.0100	0.1030	0.0100	$\hat{k}_{MLE}$	$\hat{\sigma}_S = \hat{\sigma}_{MLE}$
		$\sigma = 0.5$	0.0858	0.2500	0.1030	0.2500	$\hat{k}_{MLE}$	$\hat{\sigma}_S = \hat{\sigma}_{MLE}$
		$\sigma = 1$	0.0858	1.0000	0.1029	0.9990	$\hat{k}_{MLE}$	$\hat{\sigma}_S$
100	k=2	$\sigma = 0.1$	0.7718	0.1673	0.7708	0.1674	$\hat{k}_S$	$\hat{\sigma}_{MLE}$
		$\sigma = 0.5$	0.7722	4.1948	0.7712	4.1990	$\hat{k}_S$	$\hat{\sigma}_{MLE}$
		$\sigma = 1$	0.7717	16.7367	0.7707	16.7621	$\hat{k}_S$	$\hat{\sigma}_{MLE}$
	k=0.5	$\sigma = 0.1$	0.0692	0.0211	0.0689	0.0212	$\hat{k}_S$	$\hat{\sigma}_S$
		$\sigma = 0.5$	0.0719	0.5334	0.0719	0.5362	$\hat{k}_{MLE} = \hat{k}_S$	$\hat{\sigma}_{MLE}$
		$\sigma = 1$	0.0723	2.1627	0.0721	2.0332	$\hat{k}_S$	$\hat{\sigma}_S$
	k=1	$\sigma = 0.1$	0.0858	0.0100	0.0959	0.0100	$\hat{k}_{MLE}$	$\hat{\sigma}_S=\hat{\sigma}_{MLE}$
		$\sigma = 0.5$	0.0858	0.2500	0.0959	0.2500	$\hat{k}_{MLE}$	$\hat{\sigma}_S=\hat{\sigma}_{MLE}$
		$\sigma = 1$	0.0858	1.0000	0.0959	1.0000	$\hat{k}_{MLE}$	$\hat{\sigma}_S=\hat{\sigma}_{MLE}$

4-3 مناقشة النتائج

في هذا الجانب تم تحليل نتائج المحاكاة لتوزيع لابلاس الغير متماثل الموضحة في الجدول رقم (2) والمتضمنة قيم مقدرات متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) .

1- عند كافة حجوم العينات المختلفة نلاحظ نتائج قيم (IMSE) ان طريقة بيز تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية هي الأفضل بالنسبة لتقدير معلمتي الالتواء (k) والقياس (σ) لتوزيع لابلاس الغير متماثل (AL) .

2- عندما تكون معلمة الالتواء (k>1) عند قيمة (k=2) نلاحظ تفوق نتائج (IMSE) بالنسبة لمقدر بيز لمعلمتي الالتواء والقياس تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية مقارنة مع طريقة الإمكان الأعظم

3- عندما تكون قيمة معلمة الالتواء (k=1) تتساوى قيم المقدرات الالتواء (k) والقياس (σ) لتوزيع لابلاس (AL) ، تكون نتائج قيم (IMSE) بالنسبة لمعلمة الالتواء (k) لدالة الإمكان الأعظم هي الأفضل ، اما بالنسبة لنتائج (IMSE) لمعلمة القياس (σ) تتساوى مع مقدرات نتائج (IMSE) لمعلمة الالتواء (k) .

4- عندما تكون معلمة الالتواء (k<1) عند قيمة (k=0.5) نلاحظ تفوق نتائج (IMSE) بالنسبة لمقدر بيز لمعلمتي الالتواء والقياس تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية عندما تكون قيمة ($\sigma = 0.5, 0.1$) ، في حالة ($\sigma = 1$) نلاحظ ان دالة الإمكان الأعظم هي الأفضل بالنسبة لمعلمتي الالتواء والقياس .

5- الاستنتاجات (Conclusions and Recommendations)

1-5 الاستنتاجات (Conclusions)

1- أظهرت نتائج المحاكاة لجميع حجوم العينات بالنسبة لمعلمة القياس (σ) بأن دالة الخسارة التربيعية هي الأفضل المستعملة في تقدير قيمة معلمات توزيع لابلاس الغير متماثل ، عندما تكون قيمة المعلمة (k>1)هي التي تمتلك اقل (IMSE) من خلال تكرار التجربة لـ 1000مرة ، مقارنة مع توزيع لابلاس المتماثل عند قيمة المعلمة (k=1) بشكل متساوي ، اما عندما تكون قيمة المعلمة (k<1) هي التي تمتلك أيضا اقل مقدر IMSE لكل من معلمتي الالتواء والقياس

2- وبالتالي يتضح من الجدول ان قيم نتائج (IMSE) لمقدرات معلمتي الالتواء (k) والقياس (σ) لتوزيع لابلاس الغير متماثل تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية (SELF) هي الأفضل لجميع حجوم العينات مقارنة مع

مقدر دالة الإمكان الأعظم ، مما يؤكد كفاءة مقدر بيز تحت دالة خسارة التربيعية والخصائص التي تتميز بها، مما يجعلها مفضلة على غيرها من الطرائق .

2-5 التوصيات (Recommendations)

بناءً على نتائج المحاكاة والاستنتاجات التي تم التوصل اليها نوصي باستخدام طريقة Bayes المعتمدة على دالة خسارة الخطأ التربيعية لتقدير معلمات توزيع لابلاس الغير متماثل عندما تكون $k>1$ وذلك لانها اعطت نتائج افضل من طريقة M.L.E.

المصادر (References)

[1] Aksoy,S., (2008)," Bayesian Decision Theory ", Bilkent University , Department of Computer Engineering , Sakosoy@cs.bilkent.edu.tr ,CS 551.

[2] Gamerman, D.,Migon ,H. ,S., and Louzada, F., (1999),"Statistical Inference An Integrated Approach", Second Edition .

[3] Ghosh, J., K., Delampady, M., and Samanta, T. ,(2006), " An Introduction to Bayesian Analysis: Theory and Methods", Springer , first Edition.

[4] Hasan, M. R., & Baizid, A. R .,(2017)," Bayesian Estimation under Different Loss Function Using Gamma prior for the Case of Exponential Distribution", Journal of Scientific Research ,Vol. (9),No.(1),pp.(67-78).

[5] Hossianzadeh ,A ., & Zare , K ., (2016), "Bayesian Analysis of Discrete Skewed Laplace distribution", Journal of Modern Applied Statistical , Vol. (15), No. (2),PP.(696-702).

[6] Jammalamadaka, S. R., and Kozubowski, T. J., (2004), " New Families of Wrapped Distributions for Modeling Skew Circular Data",Communications in Statistics-Theory and Methods, Vol.(33)،No. (9),pp.(2059-2074).

[7] Kotz, S., Kozubowski, T., and Podgorski, K., (2001), "The Laplace Distribution and Generalizations: A revisit with Applications to Communications, Economics, Engineering, and Finance",Springer, Science and Business Media.

[8] Kotz,S., Kozubowski, T.J., and Podgorski, K., (2003), "An Asymmetric Multivariate Laplace Distribution", No. 367,pp. (1-26).

[9] Kozubowski, T. J., and Podgórski, K., (2001),"Asymmetric Laplace Laws and Modeling Financial Data", Mathematical and Computer Modelling, Vol. (34), pp.(1003-1021).

[10] Kozubowski, T. J., and Podgorski, K. ,(2000), " Asymmetric Laplace Distributions", Mathematical Scientist, Vol. (25), No. (1), pp. (37-46).

[11] Kotz,S., Kozubowski, T.J., and Podgorski, K., (2002), " Maximum Likelihood Estimation of Asymmetric Laplace parameters", Ann. Inst. Static. Math ,Vol.(54),No.(4),PP.(816-826)

[12] Rahman, H., Roy, M. K., and Baizid, A. R., (2012), "Bayes Estimation Under Conjugate Prior for the Case of Power Function Distribution", American Journal of Mathematics and Statistics, Vol. (2)، No. (3)، pp. (44-48).

[13] Sultan, H., and Ahmad, S., P., (2017), " Bayesian Analysis for Generalized Rayleigh Distribution: Lindley's approximation",International Journal of Advance Research in Science and Engineering,Vol.(6),No.(3),pp(214-223).

Comparison of methods for estimating the parameters of the asymmetric Laplace distribution using the quadratic loss function and the maximum possibility method

Researcher / Asmaa Khamis Rady,
P. Dr. Ibtisam Kareem Abdullah

Abstract:

The asymmetric Laplace distribution (AL) has a fundamental and important role in developing mathematics and statistics and applying its properties in the financial field. Quadratic, assuming gamma and exponential precedence functions for each of the parameters of skew and scaling, respectively. Whereas the maximal potential estimators and Lindley approximation were used efficiently in the Bayesian estimation. Based on the simulation method to generate random samples with four different sample sizes (n = 15, 30, 60, 100 and recurrence). The value of L=1000 with taking default values of the two parameters k, \\sigma and initial values for a, b, c, depending on the mean integral error squares (IMSE), where the comparison was made between the squared error loss function and the method of greatest possibility, where the results showed that the estimator of Baseline for the parameters of skewness and measurement under the squared error loss function is better than the method of greatest possibility.

Key words: asymmetric Laplace distribution, maximum potential function estimator, squared error loss function, Lindley approximation.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………..
………………………………………………………………………
………………………………………………………………
………………………………………………………
……………………………………………
…………………………………..
……………………………..
……………………..
…………………
……………
…………..
…………
………
……
….