تقدير معلمات أنموذج ARMA عندما يتبع الخطأ العشوائي التوزيع الاسي ذو ا لمعلمتين

رواء مالك حسوني / الباحثة / rawaamalikhassooni@gmail.com
أ.م.د علي ياسين غني / الجامعة المستنصرية/ كلية الادارة والاقتصاد
badrawi66@uomustansiriyah.edu.iq

P: ISSN : 1813-6729
E : ISSN : 2707-1359
http://doi.org/10.31272/JAE.i130.33

تأريخ أستلام البحث : 2021/6/8   مقبول للنشر بتأريخ : 2021/7/4

الملخص

تناول هذا البحث نوع من انواع النماذج التي اقترحها بوكس جينكينز وهو الانموذج المختلط ARMA(1,1). والتي يمكن من خلالها التعامل مع السلاسل الزمنية سواء كانت مستقرة او غير مستقرة . تم استعراض النموذج وتعريف الدوال الخاصة به عندما يتبع الخطأ العشوائي التوزيع غير الطبيعي، واستعمل التوزيع الاسي ذو المعلمتين وهو من التوزيعات المستمرة. تم تقديم الاختبارات المناسبة للدراسة وقدرت معلمات الانموذج ARMA(1,1) بطريقة الامكان الاعظم ، تم ايضا تقدير معلمات التوزيع الاسي ذو المعلمتين بطريقة (MLS) ولأن النظام لا يمتلك حلاً حتى عند استخدام طرائق عددية تم اللجوء إلى طريقة العزوم.اما في الجانب التطبيقي تم تحليل مجموعة من البيانات الحقيقية التي تمثل سرعة الرياح في العراق حيث تبين ملائمة التوزيع للبيانات وتحقق ان السلسلة شبه مستقرة ، وفي تشخيص النموذج تبين ان النموذج المقترح هو ARMA(1,1).

المصطلحات الرئيسية للبحث : الانموذج المختلط ARMA , التوزيع غير الطبيعي, السلاسل الزمنية, التوزيع الاسي ذو المعلمتين , تقدير المعلمات .

مجلة الادارة و الاقتصاد
مجلد 46 / العدد 130 / كانون الاول/ 2021
الصفحات : 190-212

* بحث مستل من رسالة ماجستير

المقدمة:-

يعتبر موضوع السلاسل الزمنية من المواضيع المهمة وخاصة في تحليل سلوك الظواهر المختلفة وتفسيرها والاستفادة منها في التخطيط والتنبؤ .ويعد تحليل السلاسل الزمنية احدى الوسائل المهمة في البحث العلمي فهي بحد ذاتها وسيلة وليس غاية. اي يمكن استخدام السلاسل الزمنية اينما وجد البحث العلمي سواءً كان ذلك في مجال الاقتصاد، الزراعة، الصحة ، الصناعة وغيرها. حيث تعاقبت البحوث والدراسات وانصب اهتمام الباحثين على دراسة السلاسل الزمنية عندما يتبع الخطأ العشوائي التوزيع غير الطبيعي، بعد ظهور النسبة المرتفعة من السلاسل الزمنية غير الطبيعية وكيفية نمذجتها , فقد درس أنموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الاولى AR(1) الطبيعي وغير الطبيعي. وغيرها من النماذج. في بعض الدراسات السابقة للسلاسل الزمنية كان الافتراض انها تتبع التوزيع الطبيعي دون الرجوع الى توزيعها الدقيق. لكن ليس من الضروري انها تتبع التوزيع الطبيعي فقد تتبع توزيعات اخرى, هذا الافتراض قد يسبب مشكلة في عملية التقدير او عملية بناء النماذج او عملية التنبؤ.حيث يهدف هذا البحث الى دراسة بعض الخصائص الاحتمالية للانموذج المختلط ARMA (1,1) عندما يتبع الخطأ العشوائي التوزيع الاسي ذو معلمتين.

2- السلاسل الزمنية Time series [5]

السلسلة الزمنية هي ترتيب زمني تتابعي من المشاهدات لمتغير معين.او هي مجموعة من القيم المشاهدة المأخوذة بفترات زمنية وهذه المجموعة هي المقطع المحدد للمتتابعة.

وتكون السلسلة الزمنية على شكلين اعتماداً على طبيعة المشاهدات الموجودة في المتتابعة يمكن ان تكون السلسلة مستمرة او متقطعة .ففي السلسلة الزمنية المستمرة (Continues Time Series) تتم المشاهدة في كل لحظة زمنية، مثل درجة الحرارة والاسعار. تكون ذات مشاهدات متصلة ، بينما في السلاسل الزمنية المتقطعة تتم المشاهدات في نقاط زمنية متقطعة تكون على شكل فترات متقطعة ثابتة حيث قد تكون يوم او شهر او سنة مثل هذه البيانات تكون ما يدعى بالسلسلة الزمنية المتقطعة (Discrete time series).

1- السلاسل الزمنية المستقرة

ان السلسلة الزمنية تكون مستقرة تماما اذا كانت خواصها لاتتأثر بتغير الزمن .وتكون ضعيفة الاستقرار (Weakly Stationary) اذا كانت دالة التباين المشترك الذاتي (Auto Covariance Function) للسلسلة تعتمد فقط على البعد الزمني بين القيم اي ان ($t_2 - t_1$) اما الوسط الحسابي فيجب ان يكون ثابتا لجميع فترات t للسلسلتين المستقرة تماما او الضعيفة الاستقرارية. وتكون السلسلة غير مستقرة اذا لم يكن لها وسطا ثابتا وتباينا ثابتا اي ان قيمها تتذبذب حول عدة اوساط، ويمكن ملاحظة ذلك من خلال دالتي التغاير المشترك والارتباط بين (Z_t, Z_{t+k})حيث نلاحظ اعتمادها على *الزمن* t.

ويوجد عدة اختبارات للكشف عن استقرارية السلسلة الزمنية منها:

2- 1 اختبار ديكي- فولر Augmented Dikey-Fuller Test [2]

ان اختبار ديكي- فولر المطور عام (1981) يعمل على البحث عن الاستقرارية او عدمها لسلسلة زمنية ما . حيث يرمز له (ADF) ويكتب بالصيغة الاتية :[2]

$$\nabla Y_t = \lambda Y_{t-1} - \sum_{j=2}^{p} \phi_j Y_{t-j+1} + \varepsilon_t \qquad (1)$$

أن Y_t يمثل القيمة الظاهرة في الزمن t ،وأن ε_t يمثل الخطأ العشوائي و∇ يمثل معامل الفروق و(λ,ϕ) هي معلمات النموذج فيتم تقديرها بطريقة المربعات الصغرى (OLS). وأن الفرضية المراد اختبارها هي:

$H_0: \lambda = 0$ السلسلة لها جذر وحدة (غير مستقرة)

$H_1: \lambda \neq 0$ السلسلة ليس جذر لها وحدة (مستقرة)

وان احصاء الاختبار هي:

$$ADF = \frac{\hat{\phi}}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}}} \qquad (2)$$

حيث يتم رفض فرضية العدم H_0 اذا كانت قيمة (p – value) اقل من (0.05) أي أن السلسة مستقرة , اما اذا كانت قيمة (p – Value) اكبر من (0.05) عدم رفض فرضية العدم اي السلسلة غير مستقرة

2-2اختبار فيلبس –بيرون Phillips and Perron Test [2]

اعتمد فيلبس- بيرون عام(1988) وهو من الاختبارات غير المعلمية حيث يعتبر فعالا ولا يأخذ بعين الاعتبار التباين الشرطي للاخطاء. ويعالج مشاكل الارتباط التسلسلي بعملية تصحيح لامعلمية. حيث يتم حساب احصاءة فيلبس- بيرون مع $K = \frac{\hat{\sigma}^2}{S_1^2}$ والذي يساوي (1−) في حالة التقاربية عندما تكون الاخطاء تشويش ابيض وان احصاءة الاختبار هي كالاتي:

$$t_{\hat{\phi}} = \sqrt{K} \times \frac{(\hat{\phi} - 1)}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}}} + \frac{T(K-1)\hat{\sigma}_{\hat{\phi}}}{\sqrt{K}} \qquad (3)$$

حيث ان:

T: يمثل عدد المشاهدات الكلية

$\hat{\sigma}^2$:هو التباين المقدر

S^2 :يمثل معامل التصحيح(التباين طويل المدى).

وهذه الاحصاءة تقارن مع قيمة t الجدولية.

3- دالة الارتباط الذاتي The Auto Correlation Function(ACF) [8]

تعرف دالة الارتباط الذاتي والتي يرمز لها (ACF) للسلسلة الزمنية بأنها مقياس الارتباط بين(Z_t, Z_{t+k}) وهي وسيلة مهمة في تشخيص السلسلة وتخمين معلماتها .ان دالة الارتباط الذاتيρ_k لسلسلة زمنية مستقرة بمتوسط M وتباين $\gamma_0 = \sigma^2$ ودالة تغاير المشترك الذاتي γ_k وتكون بالصيغة الاتية:

$$\rho_k = \frac{E(X_t - M)(X_{t+k} - M)}{E(X_t - M)^2} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \qquad \cdots (4)$$

$$= \frac{\mathrm{E X_t X_{t+k}} - \mathrm{M}^2}{\sigma^2}$$

يمكن تلخيص دالة الارتباط الذاتي ρ_k كالاتي

ان دالة الارتباط الذاتي ρ_kو γ_k هي دوال زوجية اي

$1-\gamma_0 = Var(Z_t)$ $\qquad \rho_0 = 1$

$2-\gamma_k \leq \gamma_0$ $\qquad |\rho| \leq 1$

$3-\gamma_k = \gamma_{-k}$ $\qquad \rho_k = \rho_{-k}$ $\qquad$ Z_t مستقرة لذلك فأن

هناك صعوبة في تفسير دالة الارتباط الذاتي للعينة التي تسمى عادة معامل الارتباط الذاتي في حالة وجود العديد من العمليات غير الطبيعية لها نفس معامل الارتباط الذاتي

حيث تقدر دالة الارتباط الذاتي للعينة (Sample Correlation Function) من الصيغة الاتية:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}\left(Z_t - \overline{Z}\right)\left(Z_{t+k} - \overline{Z}\right)}{\sum_{t=1}^{n}\left(Z_t - \overline{Z}\right)^2} \qquad \ldots(5)$$

$\overline{Z}$ تمثل الوسط الحسابي الكلي

$$\overline{Z} = \frac{\sum_{t=1}^{n} Zt}{N} \qquad \ldots\ (6)$$

ولحجم العينة N يوجد(N−1) من معاملات الارتباط الذاتي اي ان

K=1,2,3……….,N−1

ان دالة الارتباط الذاتي في نموذج ARMA بعد الازاحة (q−p)تنحدر (تتناقص) بشكل اسي او بشكل موجات جيبية وهي تشبه سلوك نموذجAR

4- دالة الارتباط الذاتي الجزئي(PACF) [8]

Partial Autocorrelation Function

أن دالة الارتباط الذاتي الجزئي Partial Autocorrelation Function التي يرمز لها ب(PACF) تسخدم في تحديد النموذج المناسب للسلسلة الزمنية المستقرة,

وان دالة الارتباط الذاتي الجزئي (PACF) هي المعاملات ϕ_{kk} المتأتية من الارتباط الذاتي بين Z_{t+k}, Z_t بعد ازالة تأثير $Z_{t+1}, Z_{t+2}, Z_{t+3}, \cdots\cdots Z_{t+k-1}$ أي:

$$Corr(Z_t, Z_{t+1} | Z_{t+1}, Z_{t+2} \cdots, Z_{t+k-1}) \qquad (7)$$

فاذا كانت لدينا { Z_t} عملية مستقرة بحيث ان EZ_t0= فلايجاد دالة الارتباط الذاتي الجزئي (PACF) نأخذ الانحدار الخطي لـZ_{t+k}الى $(Z_{t+1}, Z_{t+2}, \cdots, Z_{t+k-1})$ ويكون $\hat{Z}_{t+k}$ أفضل تقدير خطي لـ Z_{t+k} حيث ان:

$$\hat{Z}_{t+1} = \alpha_1 Z_{t+k-1} + \alpha_2 Z_{t+k-2} + \cdots\cdots + \alpha_{k-1} Z_{t+1} \qquad (8)$$

$(1 \le i \le k-1)$; α_i تمثل معاملات متوسط مربعات الانحدار الخطي وتشتق من:

$$E(Z_{t+k}, \hat{Z}_{t+k})^2 = E(Z_{t+k} - \alpha_1 Z_{t+k-1} - \cdots - \alpha_{k-1} Z_{t+k})^2) \qquad \cdots (9)$$

فنحصل من المعادلة اعلاه على النظام الخطي للمعادلات الاتية:

$$\gamma_i = \alpha_1 \gamma_{i-1} + \alpha_2 \gamma_{i-2} + \cdots\cdots + \alpha_{k-1} \gamma_{i-k+1} \qquad \cdots (10) \qquad (1 \le i \le k-1)$$

Hence

$$\rho_i = \alpha_1 \rho_{i-1} + \alpha_2 \rho_{i-2} + \ldots + \alpha_{k-1} \rho_{i-k+1} \qquad (11)$$

وتكون المعادلة اعلاه بصيغة المصفوفات كمايأتي:

$$\begin{bmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \vdots\\ \rho_{k-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2}\\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \rho_{k-4} & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_{k-1}\end{bmatrix} \qquad (12)$$

وبالطريقة نفسها فأن $\hat{Z}_t$ يكون افضل تقدير خطي لـZ_t كما يأتي:

$$\hat{Z}_t = \beta_1 Z_{t+1} + \beta_2 Z_{t+2} + \cdots\cdots + \beta_{k-1} Z_{t+k-1} \qquad \cdots (13)$$

حيث $(1 \le i \le k-1)$;β_i تمثل معاملات متوسط مربعات الانحدار الخطي وتشتق من تدنية:

$$E\left(Z_t - \hat{Z}_t\right) = E(Z_t - \beta_1 Z_{t+1} - \beta_2 Z_{t+k} - \cdots - \beta_{k-1} Z_{t+k-1})^2$$

Hence

$$\begin{bmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \vdots\\ \rho_{k-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2}\\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \rho_{k-4} & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_{k-1}\end{bmatrix} \qquad (14)$$

$\therefore\ \alpha_i = \beta_i\ (1 \le i \le k-1)$

وهذا يعني ان الارتباط الذاتي الجزئي بين Z_{t+k}, Z_t يساوي الارتباط الذاتي الاعتيادي بين $(Z_t - \hat{Z}_t)$ و$(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k})$. وبأفتراض ان ϕ_{kk} تشير الى الارتباط الذاتي الجزئي بين Z_t و Z_{t+k} يكون:

$$\phi_{kk} = \frac{Cov[(Z_t - \hat{Z}_t)(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k})]}{\sqrt{Var(Z_t - \hat{Z}_t)}\sqrt{Var(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k}}} \qquad \cdots (15)$$

ومن ملاحظة البسط والمقام اعلاه وتبسيطهما نحصل على:

$$\begin{aligned} Var\left(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k}\right) &= Var\left(Z_t - \hat{Z}_t\right)\\ &= \gamma_0 - \alpha_1\gamma_1 - \cdots - \alpha_{k-1}\gamma_{k-1} \qquad \cdots (16)\end{aligned}$$

وباستعمال الحقيقة ان

$\alpha_i = \beta_i\ (1 \le i \le k-1)$

يكون:

$$Cov\left[\left(Z_t - \hat{Z}_t\right)\left(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k}\right)\right] = \gamma_k - \alpha_1\gamma_{k-1} - \cdots - \alpha_{k-1}\gamma \qquad \cdots (17)$$

وبذلك فأن ϕ_{kk} تكون:

$$\phi_{kk} = \frac{\gamma_k - \alpha_1\gamma_{k-1} - \cdots - \alpha_{\tau-1}\gamma_1}{\gamma_O - \alpha_1\gamma_1 - \cdots - \alpha_{k-1}\gamma_{k-1}} = \frac{\rho_k - \alpha_1\rho_{k-1} - \cdots - \alpha_{k-1}\rho_1}{1 - \alpha_1\rho_1 - \cdots - \alpha_{k-1}\rho_{k-1}} \qquad (18)$$

حيث ϕ_{kk} تشير الى دالة الارتباط الذاتي الجزئي (PACF).

ان دالة الارتباط الذاتي الجزئي لنموذج ARMA تنحدر بشكل اسي او تسلك سلوك دالة الجيب المتضائلة وتكون مشابهة لسلوك MA.

5-اختبارات حسن المطابقة

قام الباحثان بأستعمال اختبارات حسن المطابقة لمعرفة مدى ملائمة التوزيعات المحددة للبيانات. وكالآتي:

1-5 اختبار Kolmogorove- Smirnov [4]

هو من الاختبارات اللامعلمية حيث يعتمد على ايجاد التوزيع التراكمي لتكرارات القيم.حيث تختبر الفرضيات كالاتي:

$H_0: F(x) = F(y)$
$H_1: F(x) \neq F(y)$

حيث F(x)ان هو التوزيع التراكمي لمشاهدات المجموعة الاولى في المجتمع وF(y) هو التوزيع التراكمي لمشاهدات المجموعة الثانية في المجتمع.

وتكتب صيغة احصاءة الاختبار بالصيغة الاتية:

$$D = Max_{1\le k\le r}[|S(x_k) - S(y_k)|] \quad \cdots (19)$$

حيث ان S(x)هو محموع تكرارات العينة الاولى و S(y) مجموع تكرارات العينة الثانية وان D هي اكبر فرق مطلق بين التوزيعين التراكميين النسبيين حيث تقارن القيمة الحسابية ل D مع القيمة الجدولية من جدول Kolmogorove–Smirnov بحجم يساوي n ومستوى معنوية تساوي α .فأذا كانت القيمة المحسوبة ل D اكبر من نظيرتها القيمة الجدولية ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة.

5-2 اختبار مربع كاي Chi–Square Test [4]

ان اختبار مربع كاي هو من الاختبارات اللامعلمية المستعملة لتحديد جودة التطابق ومن شروطه ان تكون بيانات العينة عشوائية ومستقلة . وان صيغته الاحصائية التالية:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O-E)^2}{E} \quad \cdots (20)$$

حيث ان :

O : تمثل قيمة المشاهدة اي القيمة الموجودة في جدول البيانات الخاصة بالتجربة

E : القيمة المتوقعة

اذا كانت قيمة X^2 المحسوبة اكبر من الجدولية عند مستوى معنوية α ودرجة حرية (K–1) فأنه ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة.

5-3 اختبار اندريسون دارلنك Andereson Darling Test [7]

ان هذا الاختبار يعتمد في حسابه على الدالة الاحتمالية التراكمية (CDF) ويرمز له (AD) يستخدم عندما تكون العينة من مجتمع ذو توزيع محدد.حيث ان صيغة الاختبار هي كالاتي:

$$AD = -N - S \quad , \quad S = \sum_{i=1}^{N} \frac{2i-1}{N}[lnF(xi) + \ln(1 - F(x_{N+1-I})] \quad \cdots (21)$$

حيث ان N تمثل عدد المشاهدات

وان فرضيات الاختبار :

H_0: التوزيع يمثل البيانات

H_1: التوزيع لايمثل البيانات

فأذا كانت قيمة (AD) المحسوبة اصغر من قيمة (AD) الجدولية فأن التوزيع المحدد هو التوزيع الذي يمثل البيانات ، اما اذا كانت قيمة (AD) المحسوبة اصغر من القيمة الجدولية يدل على ان التوزيع لايمثل البيانات.

6- النماذج المختلطة (انحدار ذاتي- وسط متحرك) المستقرة [5] [3] [1]

Stationary Mixed (Auto regressive–Moving Average)Models

ان هذا النوع من السلاسل الزمنية المستقرة غالبا يكون لها خصائص نموذجين الاول نموذج الانحدار الذاتي AR والثاني نموذج الوسط المتحرك MA ،لان هذا النوع من العمليات لايمكن تمثيلها بنموذج الانحدار الذاتي فقط او نموذج الوسط المتحرك فقط .حيث يسمى بالنموذج المختلط ويكون اختصاره ARMA(p,q) حيث تمثل (p) رتبة الانحدارذاتي وتمثل (q) رتبة الوسط المتحرك.

لتكن $\{ Z_t\,;\, t = 0 \pm 1 \pm 2 \cdots\cdots\cdots \}$ تمثل سلسلة زمنية مستقرة حيث تكون صيغة النموذج المختلط.

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots\cdots + \phi_p Z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q} \qquad \cdots (22)$$

وبأستخدام معامل الازاحة الخلفي (Back Word Shift Operator) يكون كالاتي

$$\phi(B) Z_t = \theta(B) a_t$$

و a_t :هي سلسلة الاخطاء العشوائية المستقلة ذات توزيع متطابق بمتوسط صفر وتباين ثابت σ_a^2

$a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$ وتسمى بسلسلة بالتشويش الابيض(White noise) .

$(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi p)$: تمثل معلمات انموذج الانحدار الذاتي

$(\theta_1, \theta_2, \ldots., \theta_q)$: تمثل معلمات انموذج الوسط المتحرك

اي ان النموذج المختلط ARMA (p,q) يكون طبيعيا اذا كان توزيع الخطا العشوائي طبيعي ويكون النموذج غير طبيعي اذا كانت a_t ذا توزيع غير طبيعي.

ولكي تحقق شرط الاستقرارية للنموذج المختلط ARMA(p,q) يجب ان تقع جذور المعادلة $\phi(B)$=0 خارج الدائرة التي نصف قطرها يساوي واحد .

ولتحقيق العملية قابلة للانعكاس (Invertiable) يجب ان يكون جذور المعادلة $\theta(B) = 0$ خارج الدائرة التي نصف قطرها يساوي واحد.

7-الانموذج المختلط من الرتبة الاولى ARMA(1,1) [3][4]

The First Order Mixed ARMA(1,1) Model

الصيغة الرياضية للانموذج ARMA(1,1) عندما يكون p=1,q=1 ويكون كالاتي :

$$Z_t = \phi_1 Z_t + a_t - \theta_1 a_{t-1} \qquad (23)$$

حيث ان a_t عملية التشويش الابيض(White noise) (سلسلة الاخطاء العشوائية) المستقلة ذات توزيع متطابق وقد يكون هذا التوزيع طبيعي او غير طبيعي.

ويمكن كتابة النموذج بصيغة عامل الازاحة B

$$\phi(B) Z_t = \theta(B) a_t \qquad \cdots (24)$$

وعملية ARMA(1,1) تكون مستقرة اذا كانت جذور *المعادلة* ϕ (B)=0) *تقع خارج دائرة الوحدة اي* $|B| > 1$ *وتؤدي الى* $|\phi| < 1$

ويكون النموذج منعكس اذا كانت جذور المعادلة($\theta(B) = 0$) تقع كلها خارج حدود الدائرة الاحادية اي $|B| > 1$ وتؤدي الى $\theta < 1$.

ويمكن التعبير عن النموذج ARMA (1,1) بصيغة الانحدار الذاتي AR:

$$\pi(B) Z_t = a_t \qquad \cdots (25)$$

اذ ان

$$\pi(B) = (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 \cdots)$$

اي

$$[1-(\pi_1+\theta_1)B-(\pi_2-\pi_1\theta)B^2-(\pi_3-\pi_2\theta_1)B^2\cdots]=(1-\phi_1B)\cdots(26)$$

وبمساواة معاملات $B^j(\cdots j=1,2,3)$ في كلا الطرفين

$$B:(\pi_1+\theta)=-\phi\to\ \pi_1=\phi-\theta$$
$$B:-(\pi_2-\pi_1\theta)=0\to\pi_2=\theta(\phi-\theta)$$

نحصل على الصيغة العامة:

$$\pi_j=\theta^{j-1}(\phi_1-\theta_1)\qquad for\ j\geq 1\qquad\cdots(27)$$

اي ان نموذج ARMA(1,1) يمكن ان يستخدم تقريباً ملائماً لنماذج الانحدار الذاتي. حيث ان التمثيل بصيغة الانحدار مفيدا في دراسة التنبؤ ويمكن اعتبارها نماذج شحيحة (Parsimonious) وهو نموذج ملائم الذي يحتوي على اقل عدد ممكن من المعلمات وقد بين (Box and Jenkins) العملية بأنها تمتلك صفة الانعكاسية.

ويمكن التعبير عن نموذج (1, 1) ARMAبصيغة الوسط المتحرك MA

في تحليل السلسلة الزمنية يمكن كتابة السلسلةZ_t بوصفها تركيبا خطيا لسلسلة متعاقبة من المتغيرات العشوائيةa_t اي بصيغة المعادلة الاتية .

$$Z_t=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\,a_{t-j}\qquad,\psi_0=1\qquad(28)$$

او يمكن وضع الصيغة (28) بهيئة اخرى

$$Z_t=a_t+(\phi-\theta)\sum_{j-1}^{\infty}\phi^{j-1}\,a_{t-1}\qquad\cdots(29)$$

ان هذه الصيغة عامة لجميع نماذج السلاسل ولكنها تختلف من حيث قيمة الاوزان ψ.

$$Z_t=\psi(B)a_t\qquad\cdots(30)$$
$$\psi(B)=\frac{(1-\theta_1B)}{(1-\phi_1B)}\qquad\cdots(31)$$

اذ ان:

$$(1-\phi B)(1+\psi_1B+\psi_2B^2+\psi_3B^3+\cdots)=(1-\theta B)$$

وبمساواة معاملات B^j في الطرفين :

$$\psi_1\ =\phi-\theta$$
$$\psi_2\ =\phi\psi_1=(\phi-\theta)\phi$$
$$\psi_j=(\phi-\theta)\phi^{j-1}\qquad,\qquad j\geq 1\qquad\cdots(32)$$

8- التوزيع الاسي ذو معلمتين Two – Parameter Exponential Distribution [6]

التوزيع الاسي لـه اهمية كبيرة في اختبارات الحياة ،حيث يتم دراسته في حالة العطلات والتوقفات التي تحدث في المكائن التي تحتاج الى تمثيل رياضي.وتطبيقه على الاجهزة والمعدات التي تكون فيها معدل فشل ثابت مع الزمن. فأن دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) له ستكون :

$$f(x;\lambda,\mu)=\lambda e^{-\lambda(x-\mu)}\qquad\lambda\geq 0,x\geq\mu\qquad\cdots(33)$$

حيث ان :

$\lambda: Scal\ Parameter$
$\mu: Location\ Parameter$

والدالة العكسية للتوزيع الأسي ذو المعلمتين هي:

$$F^{-1}(u) = \mu - \frac{ln(1-u)}{\theta} \qquad \cdots (34)$$

9- الدالة المولدة للعزوم والدالة المميزة للانموذج ARMA (1,1) [3]

لأشتقاق الدالة المولدة للعزوم (M.g.f) للنموذج ARMA(1,1) من المعادلة (23)الاتية:

$$Z_t = a_t + (\phi - \theta) \sum_{j-1}^{\infty} \phi^{j-1} a_{t-1}$$

وبتطبيق التعريف الرياضي للدالة المولدة للعزوم فأن الدالة المولدة للعزوم للسلسلة Z_t ستكون:

$$M_z(\mathrm{s}) = \mathrm{E}(\exp(\mathrm{s}Z_t))$$

$$=\mathrm{E}\left[\exp\left(sa_t + (\phi-\theta)\sum_{j-1}^{\infty}\phi^{j-1}a_{t-j}\right)\right]$$

$$M_z(s) = E(\exp(sa_t)\,.\,E(\exp(s(\phi-\theta)a_{t-1})).\,E(\exp(s\phi(\phi - \theta)a_{t-2})).\,E(\exp\,(\phi^2 s(\phi-\theta)a_{t-3}))\ldots\ldots$$

لأن الاخطاء a_t مستقلة عن بعضها البعض:

$$M_z(s) = M_a(s).\,M_a(s(\phi-\theta).\,M_a(s\phi(\phi-\theta).\,M_a(s\phi^2(\phi-\theta)\ldots\ldots$$

$$M_Z(s) = M_a(s)\prod_{k=1}^{\infty} M_a[\phi^{k-1}(\phi-\theta)s] \qquad \cdots (35)$$

الصيغة (35) تمثل الدالة المولدة للعزوم للسلسلة الزمنية (Z_t) بدلالة الدالة المولدة للعزوم للاخطاء a_t.

وبالطريقة نفسها يمكن اشتقاق الدالة المميزة للسلسلة الزمنية وبدلالة الدالة المميزة للاخطاء وكالاتي

$$\psi_z(s) = E[\exp\,(isZ_t]$$

اذ ان $i=\sqrt{-1}$ و s عدد حقيقي اختياري

$$\psi_z(s) = \psi_a(s)\prod_{k=1}^{\infty}\psi_a[\phi^{k-1}(\phi-\theta)s] \qquad \cdots (36)$$

سوف يتم اشتقاق الدالة المميزة للسلسلة المتولدة من الانموذج ARMA(1,1) عندما تتبع الاخطاء العشوائية بعض التوزيعات غير الطبيعية.

9-1_عندما يتبع الخطأ العشوائي التوزيع الاسي بمعلمتين

اذا كانت الاخطاء العشوائية a_t تتبع التوزيع الاسي ذو المعلمتين (M,λ) فأن دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) له كما في الصيغة (33) الاتية:

$$f(x;\lambda,\mu) = \lambda e^{-\lambda(x-\mu)} \qquad \lambda \geq 0, x \geq \mu$$

فأن الدالة المميزة للخطأ العشوائي كالاتي

$$\psi_x(s) = E\left[e^{isx}\right] = \lambda\int_{\mu}^{\infty} e^{isx}e^{-\lambda(x-\mu)}\,dx = \lambda e^{\lambda\mu}\int_{\mu}^{\infty} e^{isx}e^{-\lambda x}dx$$

$$= \lambda e^{\lambda\mu}\int_{\mu}^{\infty} e^{-(\lambda-is)x}dx = \lambda e^{\lambda\mu}\left[\frac{-1}{(\lambda-is)}e^{-(\lambda-is)x}\right|_{\mu}^{\infty}$$

$$= \lambda e^{\lambda\mu}\left[0 + \frac{e^{-(\lambda-is)\mu}}{(\lambda-is)}\right] = \frac{\lambda e^{is\mu}}{(\lambda-is)} \qquad \cdots (37)$$

والدالة المميزة للسلسلة Z_t بالاستفادة من معادلة (36) يمكن وضع صيغة للدالة المميزة للسلسلة كالاتي.

$$\psi_Z(s)=\psi_a(s)\prod_{j=1}^{\infty}\psi_a\left(\phi^{j-1}(\phi-\theta)s\right)$$

$$\psi_a(s)=\frac{\lambda e^{is\mu}}{(\lambda-is)}$$

$$\psi_Z(s)=\psi_a(s)\prod_{j=1}^{\infty}\psi_a\left(s\phi^{j-1}(\phi-\theta)\right)=\frac{\lambda e^{is\mu}}{(\lambda-is)}\prod_{j=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda e^{is\phi^{j-1}(\phi-\theta)\mu}}{\left(\lambda-is\phi^{j-1}(\phi-\theta)\right)}\right]$$

$$=\frac{\lambda exp\{is\mu+is(\phi-\theta)\mu\sum_{i=1}^{\infty}\phi^{j-1}\}}{(\lambda-is)}\prod_{j=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda}{\left(\lambda-is\phi^{j-1}(\phi-\theta)\right)}\right]$$

ولأن $\sum_{i=1}^{\infty}\phi^{j-1}=\frac{1}{1-\phi}$

$$\Rightarrow\psi_Z(s)=\frac{\lambda exp\left\{is\mu+\frac{is(\phi-\theta)\mu}{1-\phi}\right\}}{(\lambda-is)}\prod_{j=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda}{\left(\lambda-is\phi^{j-1}(\phi-\theta)\right)}\right]$$

$$=\frac{\lambda exp\left\{is\mu+\frac{is(\phi-\theta)\mu}{1-\phi}\right\}}{(\lambda-is)}\prod_{j=1}^{\infty}\left[1-\frac{is\phi^{j-1}(\phi-\theta)}{\lambda}\right]^{-1}$$

$$=exp\left\{is\mu+\frac{is(\phi-\theta)\mu}{1-\phi}+ln(\lambda)-ln(\lambda-is)\right.$$
$$\left.-\left(\sum_{j=1}^{\infty}ln\left[1-\frac{is\phi^{j-1}(\phi-\theta)}{\lambda}\right]\right)\right\}$$

$$=exp\left\{\frac{(1-\theta)is\mu}{1-\phi}-ln\left(1-\frac{is}{\lambda}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\sum_{j=1}^{\infty}ln\left[1-\frac{is\phi^{j-1}(\phi-\theta)}{\lambda}\right]\right)\right\}\cdots\qquad(38)$$

نلاحظ من معادلة(38) لا تعطي مؤشراً باتجاه توزيع معين ولكن يمكن الاستفادة منها في إيجاد عزوم السلسلة Z_t .

10- دالة التوزيع الحدي للسلسلة Z_t عندما تتبع الاخطاء التوزيع الاسي ذو المعلمتين

$$Let\ Z_t=Y_t+\mu\ when\ Y_t\sim Exp(\lambda)$$

$$E\{e^{-sZ_t}\}=E\{e^{-s(Y_t+\mu)}\}=e^{-s\mu}E\{e^{-sY_t}\}=\frac{\lambda e^{-s\mu}}{(\lambda+s)}\qquad\cdots(39)$$

نلاحظ أن التوزيع الحدي للسلسلة Z_t يشابه التوزيع الحدي للأخطاء a_t وهو التوزيع الأسي بمعلمتين.

11- العزوم (الاول، الثاني، الثالث، الرابع) للانموذج (1,1) ARMA غير الطبيعي [3]

ان العزوم السلسلة الزمنية اهمية في مراحل تحليلها ابتداءاً بالتشخيص والتقدير وفحص الملائمة ومن ثم التنبؤات المستقبلية ولها اهمية كبيرة في دراسة منحنيات التوزيعات التكرارية من حيث درجة التوائها وتفرطحها ومساهمتها في توليد بعض مقاييس النزعة المركزية.

للحصول على عزوم السلسلة Z_t نستخدم الدالة المميزة والاستفادة من العلاقتين .

حيث العزم من الرتبة m يتم إيجاده كالآتي:

$$E[Z^m] = (-i)^m \psi_Z^{(m)}(0) \qquad \cdots (40)$$

حيث إن:

$$\psi_Z^{(m)}(0) = \left. \frac{\partial^{(m)} \psi_Z^{(m)}(s)}{\partial s^m} \right|_{s=0} \qquad \cdots (41)$$

$m: (1,2,3 \cdots)$ عدد صحيح موجب

1-11 العزوم الاربعة الاولى للسلسلة Z_t عندما تتبع الاخطاء a_t التوزيع الاسي ذو معلمتين.

اذا كانت a_t تتبع التوزيع الاسي بمعلمتين فأن الدالة المميزة للسلسلة Z_t المعتمدة على الصيغة (38) الاتية:

$$\psi_Z(s) = exp\left\{\frac{(1-\theta)is\mu}{1-\phi} - ln\left(1-\frac{is}{\lambda}\right) - \left(\sum_{j=1}^{\infty} ln\left[1-\frac{is\phi^{j-1}(\phi-\theta)}{\lambda}\right]\right)\right\}$$
$$= exp\{Q(s)\}$$

نقوم بأيجاد مشتقة الدالة المميزة بالنسبة للمتغير s ونعوض عن s=0 نحصل على:

$$\psi_Z'(0) = Q_1(0)exp\{Q(0)\} = i\left[\frac{(1-\theta)(\lambda\mu+1)}{\lambda(1-\phi)}\right] \qquad \cdots (42)$$

$$\begin{aligned}\psi_Z''(0) &= \left[Q_2(0) + \left(Q_1(0)\right)^2\right] exp\{Q(0)\} \\ &= i^2\left\{\left[\frac{1-2\phi\theta+\theta^2}{\lambda^2(1-\phi^2)}\right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{(1-\theta)(\lambda\mu+1)}{\lambda(1-\phi)}\right]^2\right\} \qquad \cdots (43)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_Z^{(3)}(0) &= \left[Q_3(0) + 3Q_1(0)Q_2(0) + \left(Q_1(0)\right)^3\right] exp\{Q(0)\} \\ &= i^3\left\{2\left[\frac{1-\phi^3+(\phi-\theta)^3}{\lambda^3(1-\phi^3)}\right] + 3\left[\frac{(1-\theta)(\lambda\mu+1)(1-2\phi\theta+\theta^2)}{\lambda^3(1-\phi)(1-\phi^2)}\right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{(1-\theta)^3(\lambda\mu+1)^3}{\lambda^3(1-\phi)^3}\right]\right\} \qquad \cdots (44)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_Z^{(4)}(0) &= \left[Q_4(0) + 3\left(Q_2(0)\right)^2 + 4Q_1(0)Q_3(0) + 6\left(Q_1(0)\right)^2 Q_2(0) \right. \\ &\quad \left. + \left(Q_1(0)\right)^4\right] exp\{Q(0)\} \\ &= i^4\left\{6\left[\frac{1-\phi^4+(\phi-\theta)^4}{\lambda^4(1-\phi^4)}\right] + 3\left[\frac{1-2\phi\theta+\theta^2}{\lambda^2(1-\phi^2)}\right]^2 \right. \\ &\quad + 8\left[\frac{(1-\theta)(\lambda\mu+1)}{\lambda(1-\phi)}\right]\left[\frac{1-\phi^3+(\phi-\theta)^3}{\lambda^3(1-\phi^3)}\right] \\ &\quad + 6\left[\frac{(1-\theta)(\lambda\mu+1)}{\lambda(1-\phi)}\right]^2\left[\frac{1-2\phi\theta+\theta^2}{\lambda^2(1-\phi^2)}\right] \\ &\quad \left. + \left[\frac{(1-\theta)(\lambda\mu+1)}{\lambda(1-\phi)}\right]^4\right\} \qquad \cdots (45)\end{aligned}$$

بالتعويض الدالة المميزة في المعادلة (40) الآتية:

$$E[Z^m] = (-i)^m \psi_Z^{(m)}(0)$$

$$E[Z] = \frac{(1-\theta)(\lambda\mu+1)}{\lambda(1-\phi)} \quad \cdots (46)$$

$$E[Z^2] = \left[\frac{1-2\phi\theta+\theta^2}{\lambda^2(1-\phi^2)}\right] + \left[\frac{(1-\theta)(\lambda\mu+1)}{\lambda(1-\phi)}\right]^2 \quad \cdots (47)$$

$$E[Z^3] = 2\left[\frac{1-\phi^3+(\phi-\theta)^3}{\lambda^3(1-\phi^3)}\right] + 3\left[\frac{(1-\theta)(\lambda\mu+1)(1-2\phi\theta+\theta^2)}{\lambda^3(1-\phi)(1-\phi^2)}\right] + \left[\frac{(1-\theta)^3(\lambda\mu+1)^3}{\lambda^3(1-\phi)^3}\right] \quad \ldots (48)$$

$$E[Z^4] = 6\left[\frac{1-\phi^4+(\phi-\theta)^4}{\lambda^4(1-\phi^4)}\right] + 3\left[\frac{1-2\phi\theta+\theta^2}{\lambda^2(1-\phi^2)}\right]^2 + 8\left[\frac{(1-\theta)(\lambda\mu+1)}{\lambda(1-\phi)}\right]\left[\frac{1-\phi^3+(\phi-\theta)^3}{\lambda^3(1-\phi^3)}\right] + 6\left[\frac{(1-\theta)(\lambda\mu+1)}{\lambda(1-\phi)}\right]^2\left[\frac{1-2\phi\theta+\theta^2}{\lambda^2(1-\phi^2)}\right] + \left[\frac{(1-\theta)(\lambda\mu+1)}{\lambda(1-\phi)}\right]^4 \quad \cdots (49)$$

وبذلك فأن الوسط الحسابي والتباين لهذه السلسلة هما:

$$\mu_Z = E[Z] = \frac{(1-\theta)(\lambda\mu+1)}{\lambda(1-\phi)}$$

$$\sigma_Z^2 = E[Z^2] - (E[Z])^2 = \frac{1-2\phi\theta+\theta^2}{\lambda^2(1-\phi^2)}$$

12- معاملا الالتواء والتفرطح للأنموذج ARMA (1,1) غير الطبيعي. [1]

Coefficents of Skewness and Kurtosis For Non-Gaussian ARMA(1,1) Model.

الالتواء هومقدار اختلاف منحنى التوزيع التكراري عن حالة التماثل .او انه مقدار جنوح التوزيع نحو يمين خط التماثل او نحو يساره. علما بأن M_3 يسمى بمقياس التماثل Measure of Summitry، فالتوزيعات المتماثلة يكون عزمها المركزي الثالث حول المتوسط ($M_3 = 0$) فأن معامل الالتواء لها مساوي للصفر .اما اذا كان($M_3 > 0$) فالتوزيع ملتوي نحو اليمين واذا كان($M_3 < 0$) فالتوزيع ملتوي نحو اليسار.

والهدف من دراسة معامل الالتواء هو تكويم فكرة عن هيئة وشكل منحنى التوزيع التكراري . وان صيغة معامل الالتواء(Coefficient of Skewness) تلك التي تستخدم العزم الثالث.

$$SK = \frac{E\left[Z - E[Z]\right]^3}{[\sigma_Z^2]^{3/2}} \quad \cdots (50)$$

اما معامل التفرطح فيعرف بأنه مقدار تسطح او تدبب (Peakedness) المنحنى التكراري لتوزيع معين وان مقدار تدبب او تسطح المنحنى التكراري يرتبط ارتباطا وثيقا بتشتت قيم ذلك التوزيع فكلما كان التشتت عاليا فذلك يدل على تسطح المنحنى التكراري وعندما يكون التشتت واطئا فيدل على تدبب المنحنى.

ان معامل التفرطح (Coefficient of *Kurtosis*) الذي يستخدم العزم الرابع كما في الصيغة الاتية:

$$KUR = \frac{E\left[Z - E[Z]\right]^4}{[\sigma_Z^2]^2} \quad \cdots (51)$$

12−1 معامل الالتواء والتفرطح للسلسلة Z_t عندما تتبع الاخطاء a_t التوزيع الاسي ذومعلمتين

استخدام العزوم الاربع التي حصلت عليها في الفقرة(11−1) وبأعتماد الصيغتين (50) و(51) فأن معامل الالتواء:

$$SK = \frac{E\big[Z - E[Z]\big]^3}{[\sigma_Z^2]^{3/2}}$$

العزم الأول المركزي هو الصفر والثاني هو التباين، بينما العزم الثالث هوكالآتي:

$$E\big[Z - E[Z]\big]^3 = E[Z^3] - 3E[Z^2]E[Z] + 2(E[Z])^3 = 2\left[\frac{1 - \phi^3 + (\phi - \theta)^3}{\lambda^3(1 - \phi^3)}\right]$$

$$SK = \frac{E\big[Z - E[Z]\big]^3}{[\sigma_Z^2]^{3/2}} = \frac{2\left[\frac{1 - \phi^3 + (\phi - \theta)^3}{(1 - \phi^3)}\right]}{\left[\frac{1 - 2\phi\theta + \theta^2}{(1 - \phi^2)}\right]^{3/2}} \qquad \cdots (52)$$

اما التفرطح فأنه :

$$KUR = \frac{E\big[Z - E[Z]\big]^4}{[\sigma_Z^2]^2}$$

والعزم الرابع هو :

$$\begin{aligned} E\big[Z - E[Z]\big]^4 &= E[Z^4] - 4E[Z^3]E[Z] + 6(E[Z])^2E[Z^2] - 3\big[E[Z]\big]^4 \\ &= 6\left[\frac{1 - \phi^4 + (\phi - \theta)^4}{\lambda^4(1 - \phi^4)}\right] + 3\left[\frac{1 - 2\phi\theta + \theta^2}{\lambda^2(1 - \phi^2)}\right]^2 \end{aligned}$$

$$KUR = \frac{E\big[Z - E[Z]\big]^4}{[\sigma_Z^2]^2} = 3 + \frac{6\left[\frac{1 - \phi^4 + (\phi - \theta)^4}{(1 - \phi^4)}\right]}{\left[\frac{1 - 2\phi\theta + \theta^2}{(1 - \phi^2)}\right]^2} \qquad \cdots (53)$$

13- تقدير معلمات انموذج ARMA (1, 1)

Estimation Parameter of ARMA (1, 1) Model

في هذا المبحث سوف نقدر سلسلة ARMA(1.1) ، ولتقدير السلسلة لابد من تقدير معلمات التوزيع الأسي ذي المعلمتين و توزيع ليندلي ذو المعلمة الواحدة .بطريقة الامكان الاعظم (Maximum Likelihood Method (M.L.E.وهي احدى اهم طرائق التقدير التي تهدف الى جعل دالة الامكان في نهايتها العظمى.ويمكن الحصول عليها بأشتقاق لوغاريتم دالة الامكان ومساواتها بالصفر.وفي هذه الفقرة تم استخدام طريقة الإمكان الأعظم في تقدير المعلمات. وفي البدء نستطيع كتابة نموذج ARMA(1,1) كمافي صيغة المعادلة(23) الاتية:

$$\begin{aligned} &Z_t = \phi Z_{t-1} - \theta a_{t-1} + a_t \\ &\Rightarrow a_t = Z_t - \phi Z_{t-1} + \theta a_{t-1} \end{aligned}$$

عند t=0 نفرض أن $Z_0 = 0$ و $a_0 = 0$ هذا يؤدي إلى:

$$\begin{aligned} a_1 &= Z_1 - \phi Z_0 + \theta a_0 = Z_1 \\ a_2 &= Z_2 - \phi Z_1 + \theta a_1 = Z_2 - \phi Z_1 + \theta Z_1 = Z_2 - (\phi - \theta)Z_1 \\ a_3 &= Z_3 - \phi Z_2 + \theta a_2 = Z_3 - \phi Z_2 + \theta[Z_2 - (\phi - \theta)Z_1] \\ &= Z_3 - (\phi - \theta)Z_2 - \theta(\phi - \theta)Z_1 \\ a_4 &= Z_4 - \phi Z_3 + \theta a_3 = Z_4 - \phi Z_3 + \theta[Z_3 - (\phi - \theta)Z_2 - \theta(\phi - \theta)Z_1] \\ &= Z_4 - (\phi - \theta)Z_3 - \theta^2(\phi - \theta)Z_2 - \theta^3(\phi - \theta)Z_1 \end{aligned}$$

وهكذا باستخدام الاستقراء الرياضي نحصل على:

$$a_t = Z_t - (\phi-\theta)Z_{t-1} - \theta(\phi-\theta)Z_{t-2} - \theta^3(\phi-\theta)Z_{t-2} - \ldots - \theta^{t-1}(\phi-\theta)Z_1$$
$$= Z_t - (\phi-\theta)\sum_{i=1}^{t-1}\theta^{i-1}Z_{t-i} \qquad t = 2,3,\ldots,n \qquad \cdots (54)$$

13-1 تقدير معلمات نموذج(1,1) ARMA عندما يتبع الخطأ التوزيع الاسي بمعلمتين

دالة الإمكان بالنسبة للخطأ العشوائي هي:

$$L(\phi,\theta,\lambda,\mu|\underline{a}) = \lambda^n e^{-\lambda\sum_{t=1}^{n}(a_t-\mu)}$$

حيث a_t معرفة في المعادلة (54). الآن بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لدالة الإمكان نحصل على:

$$\ell(\phi,\theta,\lambda,\mu) = nln(\lambda) - \lambda\sum_{t=1}^{n}(a_t-\mu) = nln(\lambda) + n\lambda\mu - \lambda\sum_{t=1}^{n}a_t$$

للحصول على مقدرات للمعلمات $(\phi,\theta,\lambda,\mu)$ نشتق لوغاريتم دالة الإمكان بالنسبة لها وكما يأتي:

$$\frac{\partial\ell}{\partial\phi} = -\lambda\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial a_t}{\partial\phi} \Rightarrow \frac{\partial\ell}{\partial\phi} = \sum_{t=1}^{n}\frac{\partial a_t}{\partial\phi} = 0 \qquad \cdots (55)$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial\theta} = -\lambda\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial a_t}{\partial\theta} \Rightarrow \frac{\partial\ell}{\partial\theta} = \sum_{t=1}^{n}\frac{\partial a_t}{\partial\theta} = 0 \qquad \cdots (56)$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{t=1}^{n}(a_t-\mu) = 0 \qquad \cdots (57)$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial\mu} = n\lambda = 0 \qquad \cdots (58)$$

حيث إن:

$$\frac{\partial a_t}{\partial\phi} = -\sum_{i=1}^{t-1}\theta^{i-1}Z_{t-i} \qquad \cdots (59)$$

$$\frac{\partial a_t}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^{t-1}\left[\frac{1+(\theta-\phi)i}{\theta}\right]\theta^{i-1}Z_{t-i} \qquad \cdots (60)$$

ولأن هذا النظام لا يمتلك حلاً حتى عند استخدام طرائق عددية.سيتم اللجوء إلى طريقة العزوم.

***13-1-1* طريقة العزوم**

تتميز طريقة العزوم بسهولتها فهي تعتمد على فرضية مساواة عزم المجتمع M_n مع عزم العينة m_n وحل المعادلة لايجاد تقدير المعلمات.

يحتوي التوزيع على معلمتين ونموذج ARMA على معلمتين أيضاً فيكون الناتج أربع معلمات، لذا نحتاج إلى أربعة عزوم وسنستخدم هنا كل من العزم اللامركزي الأول، العزم المركزي الثاني (التباين)، العزم المركزي الثالث، العزم المركزي الرابع لكل من المجتمع والعينة وكما يأتي:

$$\mu_1' = \frac{(1-\theta)(\lambda\mu+1)}{\lambda(1-\phi)}$$

$$\mu_2 = \frac{1-2\phi\theta+\theta^2}{\lambda^2(1-\phi^2)}$$

$$\mu_3 = 2\left[\frac{1-\phi^3+(\phi-\theta)^3}{\lambda^3(1-\phi^3)}\right]$$

$$\mu_4 = 6\left[\frac{1-\phi^4+(\phi-\theta)^4}{\lambda^4(1-\phi^4)}\right] + 3\left[\frac{1-2\phi\theta+\theta^2}{\lambda^2(1-\phi^2)}\right]^2$$

$$m'_1 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t = \overline{Z}$$

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(Z_t-\overline{Z}\right)^2$$

$$m_3 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(Z_t-\overline{Z}\right)^3$$

$$m_4 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(Z_t-\overline{Z}\right)^4$$

نحصل على مقدرات العزوم بمساواة عزم المجتمع مع عزم العينة وكما يأتي:

$$\frac{\left(1-\hat{\theta}\right)\left(\hat{\lambda}\hat{\mu}+1\right)}{\hat{\lambda}\left(1-\hat{\phi}\right)} = m'_1 \qquad \cdots (61)$$

$$\frac{1-2\phi\hat{\theta}+\hat{\theta}^2}{\hat{\lambda}^2(1-\phi^2)} = m_2 \qquad \cdots (62)$$

$$2\left[\frac{1-\hat{\phi}^3+\left(\hat{\phi}-\hat{\theta}\right)^3}{\hat{\lambda}^3\left(1-\hat{\phi}^3\right)}\right] = m_3 \qquad \cdots (63)$$

$$6\left[\frac{1-\hat{\phi}^4+\left(\hat{\phi}-\hat{\theta}\right)^4}{\hat{\lambda}^4\left(1-\hat{\phi}^4\right)}\right] + 3\left[\frac{1-2\hat{\phi}\hat{\theta}+\hat{\theta}^2}{\hat{\lambda}^2\left(1-\hat{\phi}^2\right)}\right]^2 = m_4 \qquad \cdots (64)$$

نحصل على مقدرات العزوم لكل من ϕ و θ و λ من خلال حل المعادلات (61), (63) باستخدام طرائق عددية. من ثم يصبح بإمكاننا تقدير μ كما يأتي:

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\lambda}\left(1-\hat{\phi}\right)m'_1 - \left(1-\hat{\theta}\right)}{\hat{\lambda}\left(1-\hat{\theta}\right)}$$

14- متوسط مربعات الخطأ Mean Square Error

لإيجاد متوسط مربعات الخطأ وكذلك القيم التنبؤية نقوم بالآتي:

$$Z_t = \phi Z_{t-1} - \theta a_{t-1} + a_t$$
$$\Rightarrow a_t = Z_t - \phi Z_{t-1} + \theta a_{t-1}$$

عند t=0 نفرض أن $a_0 = 0$ و $Z_0 = 0$ هذا يؤدي إلى:

$$a_1 = Z_1 - \phi Z_0 + \theta a_0 = Z_1$$
$$a_2 = Z_2 - \phi Z_1 + \theta a_1 = Z_2 - \phi Z_1 + \theta Z_1 = Z_2 - (\phi-\theta)Z_1$$
$$a_3 = Z_3 - \phi Z_2 + \theta a_2 = Z_3 - \phi Z_2 + \theta[Z_2 - (\phi-\theta)Z_1]$$
$$= Z_3 - (\phi-\theta)Z_2 - \theta(\phi-\theta)Z_1$$
$$a_4 = Z_4 - \phi Z_3 + \theta a_3 = Z_4 - \phi Z_3 + \theta[Z_3 - (\phi-\theta)Z_2 - \theta(\phi-\theta)Z_1]$$
$$= Z_4 - (\phi-\theta)Z_3 - \theta^2(\phi-\theta)Z_2 - \theta^3(\phi-\theta)Z_1$$

وهكذا باستخدام الاستقراء الرياضي نحصل على:

$$a_t = Z_t - (\phi-\theta)Z_{t-1} - \theta(\phi-\theta)Z_{t-2} - \theta^3(\phi-\theta)Z_{t-2} - \ldots - \theta^{t-1}(\phi-\theta)Z_1$$
$$= Z_t - (\phi-\theta)\sum_{i=1}^{t-1}\theta^{i-1}Z_{t-i} \qquad t = 2,3,\ldots,n$$

وقيم a_t التقديرية نحصل عليها من المعادلة الآتية:

$$\hat{a}_1 = Z_1$$

$$\hat{a}_t = Z_t - (\hat{\phi} - \hat{\theta}) \sum_{i=1}^{t-1} \hat{\theta}^{i-1} Z_{t-i} \qquad t = 2,3,\dots,n$$

والقيم التقدير للمتغير التابع كما يأتي:

$$\hat{Z}_t = \hat{\phi} Z_{t-1} - \hat{\theta}\hat{a}_{t-1} + \hat{a}_t$$

ولأن $\hat{a}_t$ غير متاح يتم التعويض عنه بتوقع الخطأ والذي يساوي:

$$\hat{a}_t = \frac{\hat{\lambda}\hat{\mu} + 1}{\hat{\lambda}} \qquad if\ \ a_t \sim Two\ - paramter\ Exponential \cdots \quad (65)$$

ومتوسط مربعات الخطأ هو:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (Z_t - \hat{Z}_t)^2 \qquad \cdots (66)$$

الجانب التطبيقي :-

سيتم تحليل مجموعة من البيانات الحقيقية وبناء نموذج سلسلة زمنية من نوع الانحدار الذاتي ذو الرتبة 1 والأوساط المتحركة من نفس الرتبة أي ARMA(1,1)، حيث تمثل هذه المجموعة سرعة الرياح في العراق والتي تتبع التوزيع الأسي ذي المعلمتين. تحتوي هذه المجموعة على 85 مشاهدة تمثل سرعة الرياح مقاسةً بالكيلومتر في الساعة (km/h) في جمهورية العراق للفترة ما بين 1-كانون الأول-2020 إلى 23-شباط-2021 وقد تم الحصول على البيانات من موقع فيجوال كروسنك (www.visualcrossing.com/weather). والبيانات موضوعة في الجدول (1) وكما يأتي:

جدول(1) بيانات سرعة الرياح في العراق

Date time	Wind Speed	Date time	Wind Speed	Date time	Wind Speed	Date time	Wind Speed
01/12	9.4	23/12	22.3	14/01	39.2	05/02	31.6
02/12	11.2	24/12	20.5	15/01	13	06/02	16.6
03/12	12.5	25/12	14.8	16/01	9.4	07/02	13.9
04/12	13.1	26/12	24.1	17/01	13.7	08/02	7.4
05/12	11.2	27/12	13	18/01	20.5	09/02	9.8
06/12	31.7	28/12	14.9	19/01	20.1	10/02	11.2
07/12	13	29/12	14.8	20/01	23.2	11/02	16.6
08/12	12.3	30/12	13	21/01	24.1	12/02	14.8
09/12	16.6	31/12	9.4	22/01	23.2	13/02	9.4
10/12	14.8	01/01	9.2	23/01	17.9	14/02	11.2
11/12	16.6	02/01	8.7	24/01	8.5	15/02	22.3
12/12	9.4	03/01	12.6	25/01	9.4	16/02	44.2
13/12	10	04/01	16.7	26/01	13.9	17/02	51.2
14/12	18.4	05/01	18.3	27/01	25.1	18/02	29.5
15/12	45.3	06/01	16.6	28/01	35.1	19/02	16.6
16/12	23.1	07/01	10.6	29/01	31.6	20/02	18.4
17/12	9.4	08/01	8.5	30/01	13	21/02	25.9
Date time	**Wind Speed**	**Date time**	**Wind Speed**	**Date time**	**Wind Speed**	**Date time**	**Wind Speed**
18/12	14.8	09/01	8.8	31/01	19.4	22/02	19.5
19/12	16.8	10/01	11.2	01/02	14.8	23/02	21.4
20/12	9.8	11/01	17	02/02	17.7		
21/12	13	12/01	17	03/02	10.8		
22/12	9.4	13/01	16.8	04/02	26.8		

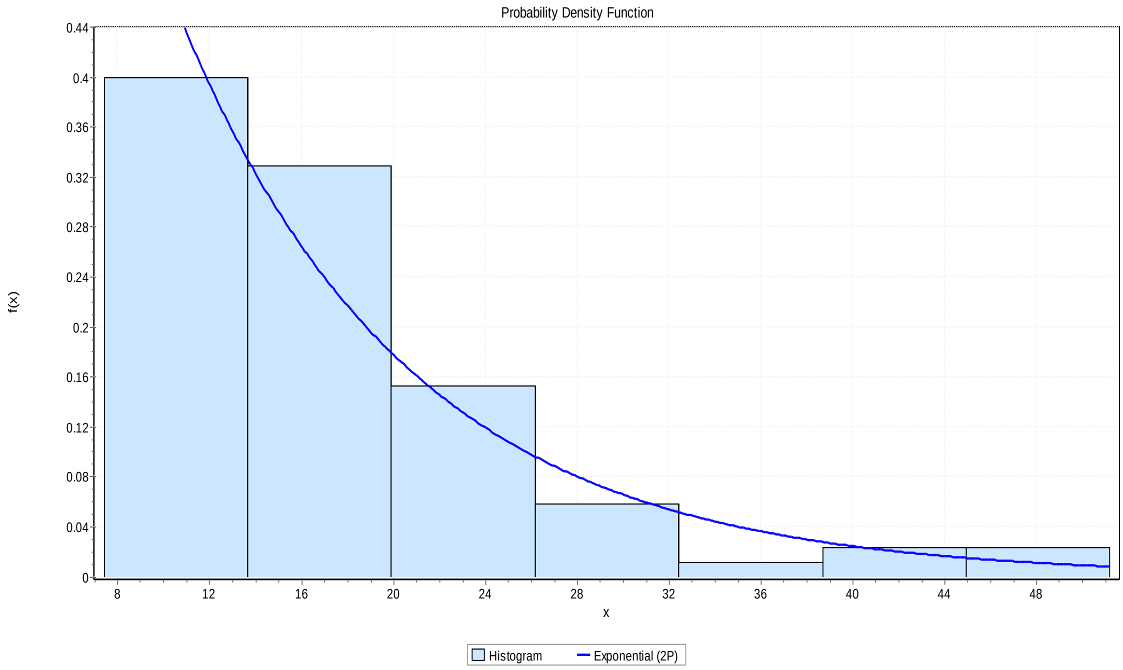
1- اختبار حسن المطابقة

تستخدم اختبارات حسن المطابقة لاختبار:

H_0: البيانات تتبع التوزيع الأسي ذي المعلمتين

H_1: البيانات لا تتبع التوزيع الأسي ذي المعلمتين

تم استخدام البرنامج الجاهز EasyFit 5.6 Professional لتبويب البيانات ورسم المدرج التكراري مع منحنى التوزيع الأسي ذي المعلمتين وكما موضح في الشكل الآتي:



شكل (1): المدرج التكراري مع منحنى التوزيع الاسي ذي المعلمتين

من الشكل (1) تبين أن توزيع السلسلة تتبع التوزيع الأسي ذي المعلمتين مما يعني ملاءمة التوزيع للبيانات وفقاً للرسم وللتأكد من ذلك تم الاختبار بمقاييس حسن المطابقة وكما يأتي:

جدول (2): اختبارات حسن المطابقة لبيانات سرعة الرياح.

Test	Kolmogorov-Smirnov	Anderson-Darling	Chi-Squared
Statistic	0.11001	1.8119	10.821
P-Value	0.23706	0.14231	0.09406

نلاحظ من الجدول (2) عدم رفض فرضية العدم المذكورة اعلاه بالمعلمتين $(\lambda = 0.0996, \mu = 7.4)$ عند مستوى معنوية 0.05 لأن قيمة P-Value أكبر من مستوى المعنوية المحدد، مما يعني ملاءمة التوزيع للبيانات وفقاً لجميع المعايير.

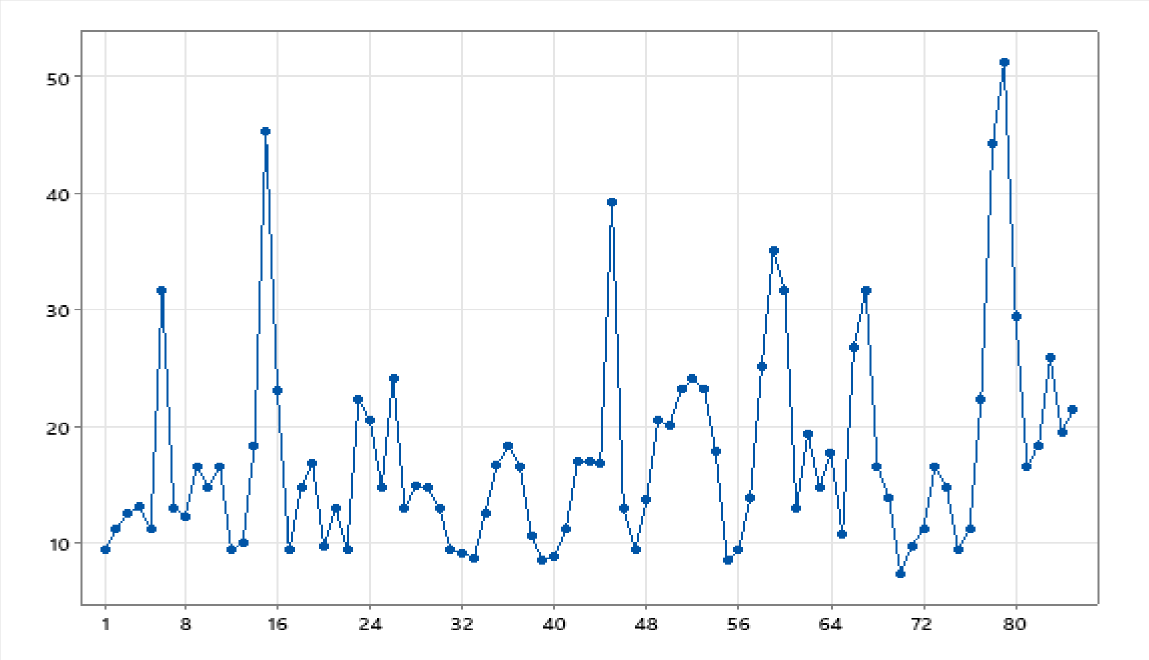
2- الاستقرارية

ومن اختبار الفرضيات (فرضية العدم والفرضية البديلة)

$H_0: \lambda = 0$ السلسلة لها جذر وحدة (غير مستقرة)

$H_1: \lambda \neq 0$ السلسلة ليس جذر لها وحدة (مستقرة)

تم رسم بيانات سلسلة سرعة الرياح في العراق كما يأتي:



شكل (2): رسم السلسلة الزمنية لبيانات سرعة الرياح

نلاحظ من الشكل رقم (2) أن السلسلة تبدو شبه مستقرة وللتأكد من ذلك تم استعمال اختبار ديكي فولر الموسع و اختبار فيلبس بيرون عن طريق البرنامج الجاهز E Views 10 وكما يأتي:

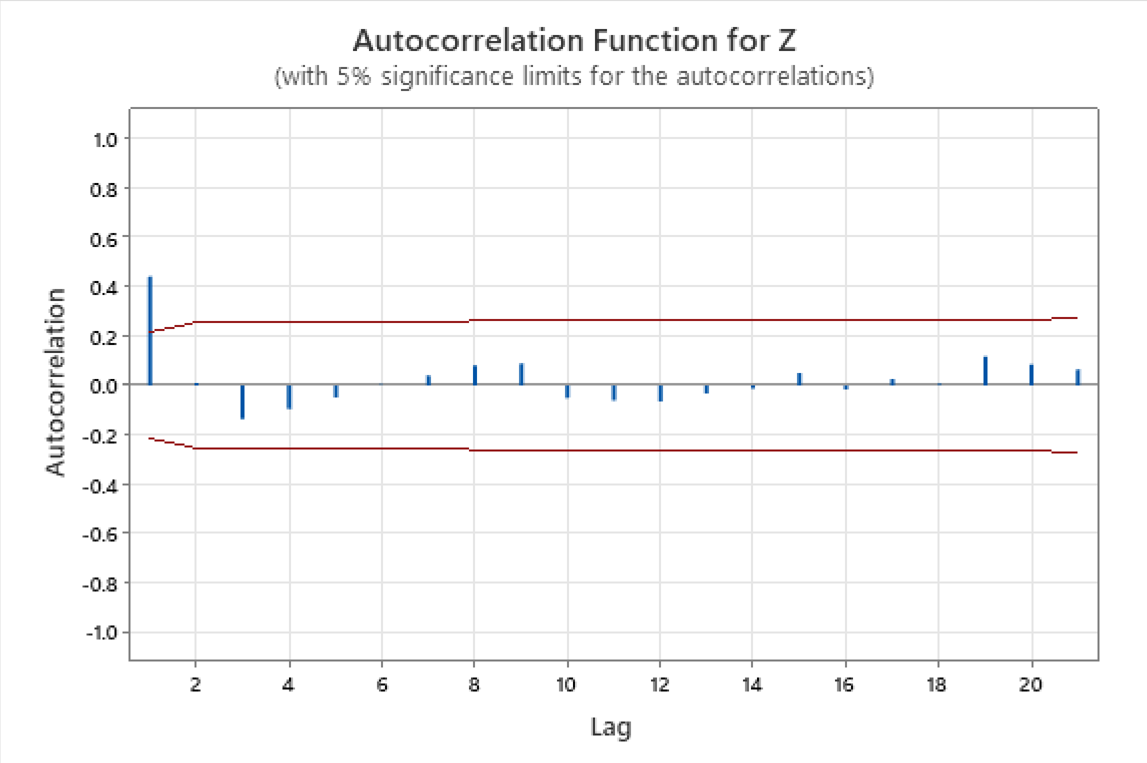
جدول (3): نتائج اختبار ADF وPP لبيانات سرعة الرياح

Test	ADF	PP
Statistic	-6.020094	-5.299598
P-Value	0.0000	0.0000

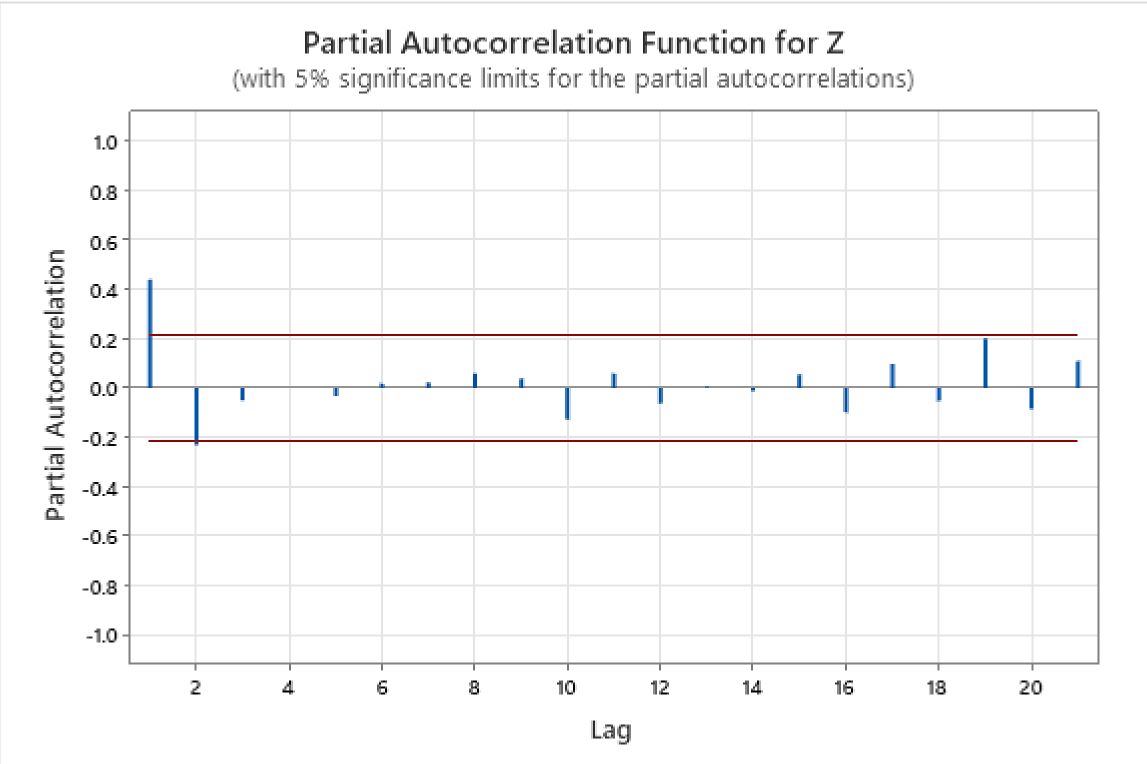
نلاحظ من الجدول (3) رفض فرضية العدم بالمعلمتين $(\lambda = 0.0996, \mu = 7.4)$ عند مستوى معنوية 0.05 لأن قيمة P-Value اصغر من مستوى المعنوية المحدد، وبذلك تتحقق الاستقرارية في السلسلة الزمنية.

3- تشخيص النموذج

تعتبر مرحلة التشخيص من المراحل المهمة في تحليل السلاسل الزمنية، وبالاعتماد على خصائص دالتي الارتباط الذاتي (ACF) والارتباط الذاتي الجزئي (PACF)، حيث يتم تشخيص النموذج بعد التأكد من استقرارية السلسلة. وقد تم رسم دالتي الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي لبيانات السلسلة الزمنية الخاصة بسرعة الرياح، وكما يأتي:



شكل (3): دالة الارتباط الذاتي لبيانات سرعة الرياح



شكل (4): دالة الارتباط الذاتي الجزئي لبيانات سرعة الرياح.

نلاحظ من الشكلين (3) و(4) في دالة الارتباط الذاتي أن القيمة الأولى فقط هي معنوية أما بقية القيم هي ارتباطات ضئيلة غير معنوية وتتلاشى إلى الصفر وفي دالة الارتباط الذاتي الجزئي أيضاً القيمة الأولى معنوية ولكن بقية الارتباطات غير معنوية فيكون النموذج المقترح هو ARMA(1,1).

4- تقدير المعلمات

تم تقدير المعلمات الخاصة بالعملية $ARMA(1,1)$ وفق توزيع الخطأ الذي يتبع التوزيع الأسي بمعلمتين بناءً على طريقة العزوم الذي تمت كتابته بلغة البرمجة Matlab وكانت النتائج كالآتي:

جدول (4): تقدير المعلمات نموذج $ARMA(1,1)$ لبيانات سرعة الرياح

$\hat{\phi}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\mu}$	MSE
0.3842	-0.6151	0.1651	0.5934	23.2656

نلاحظ من الجدول (4) أن قيمة $\hat{\phi} = 0.3842$ تقع بين 1 و-1 وبذلك يتحقق شرط الاستقرارية، وأن $\hat{\theta} = -0.6151$ هي الأخرى تقع ضمن نفس المدى وبذلك يتحقق شرط الانعكاس.

والمعادلة الآتية تمثل معادلة $ARMA(1,1)$ التقديرية:

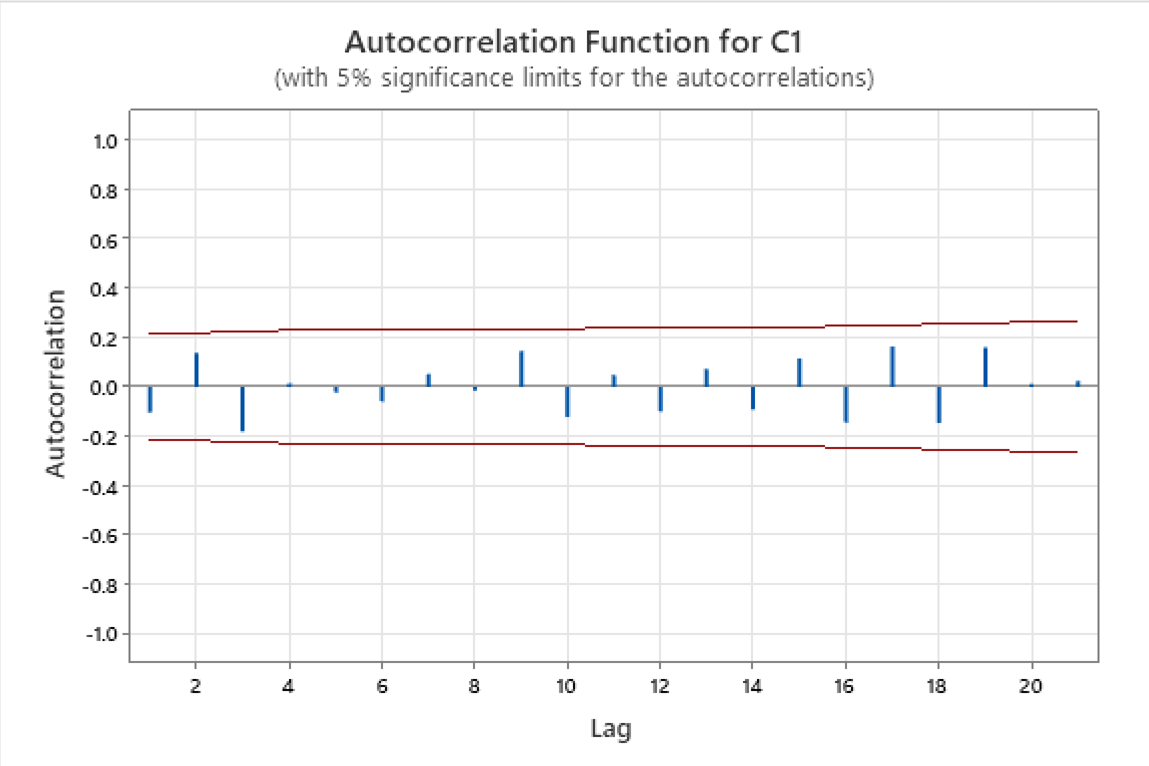
$$\hat{Z}_t = 0.3842Z_{t-1} + 0.6151\hat{a}_{t-1} + \hat{a}_t$$

ويتم تقدير $\hat{a}_t$ كما يأتي:

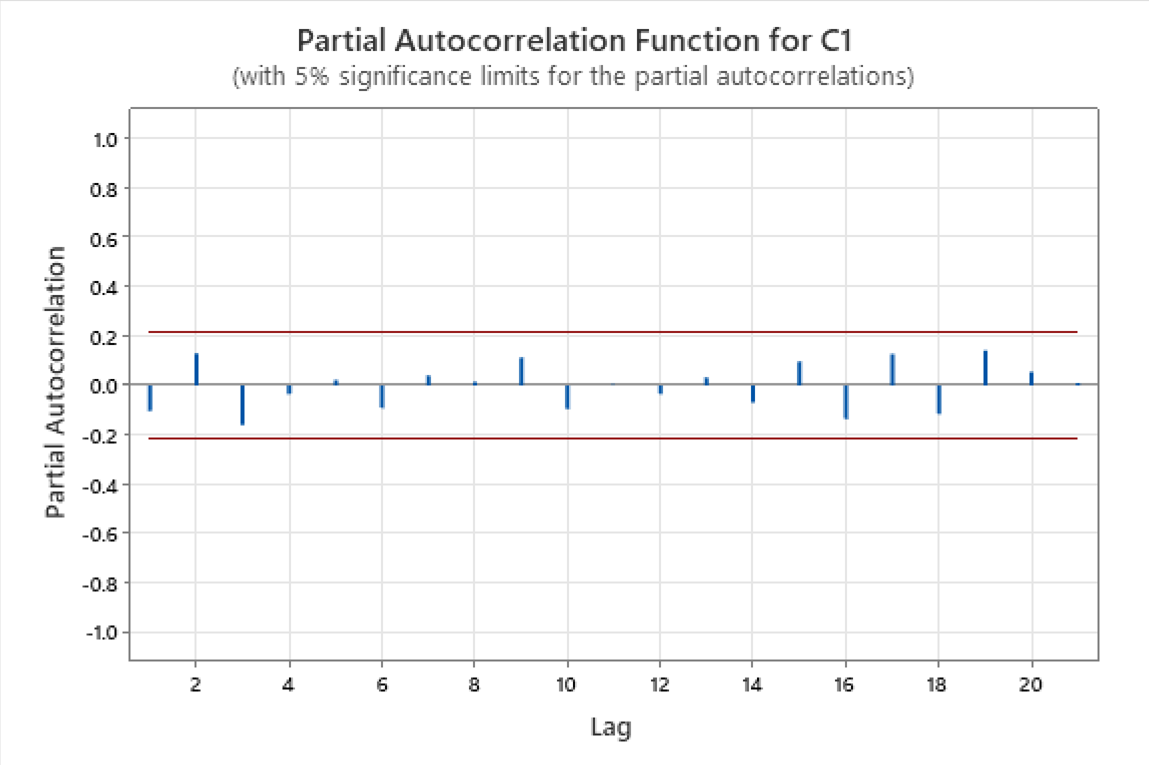
$$\hat{a}_t = \frac{\hat{\lambda}\hat{\mu} + 1}{\hat{\lambda}} = \frac{(0.1651)(0.5934)+1}{0.1651} = 6.6492$$

5- فحص النموذج

تم اختبار النموذج المقدر بالاعتماد على الرسم البياني لدالتي الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي للبواقي وكما يأتي:



شكل (5): دالة الارتباط الذاتي لبواقي بيانات سرعة الرياح



شكل (6): دالة الارتباط الذاتي الجزئي لبواقي بيانات سرعة الرياح

نلاحظ من الشكلين (5) و(6) أن معاملات الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي تقع ضمن الحدين الأعلى والأدنى مما يعني على أن البواقي هي تشويش أبيض.

6- التنبؤ

تم استخدام النموذج ARMA للتنبؤ بسرعة الرياح في العراق من 24 شباط إلى 28 شباط، أي التنبؤ بخمس قيم مستقبلية وكما يأتي:

جدول (5): القيم المستقبلية لبيانات سرعة الرياح

Date time	Wind Speed
24/02	23.6116
25/02	16.1081
26/02	16.9290
27/02	17.2444
28/02	17.3656

<u>الاستنتاجات :-</u>

1- ان الاشتقاق الذي يربط مابين الدالة المميزة للسلسلة Z_t المتولدة من الانموذج المختلط ARMA(1,1) والدالة المميزة للاخطاء a_t توصلا الباحثان نظريا الى :

أ- اذا كانت الاخطاء تتبع التوزيع الاسي بمعلمتين فأن السلسلة الزمنية لاتعطي مؤشر بأتجاه معين ولكن يمكن الاستفاد منها في ايجاد عزوم السلسلة .

ب- عند دراسة دالة التوزيع الحدي للسلسلة التي تتبع التوزيع الاسي بمعلمتين وجد ان التوزيع الحدي للسلسلة يشابه التوزيع الحدي للاخطاء وهو التوزيع الاسي بمعلمتين.

2- ان الانموذج الذي يمثل سرعة الرياح في العراق المتمثلة بالتطبيق الاول هو ARMA(1,1) عندما يتبع الخطأ التوزيع الاسي ذي المعلمتين.

3– سلسلة سرعة الرياح في العراق تمثل سلسلة زمنية شبه مستقرة وذلك وفقا للرسم والاختبارات.

التوصيات:– Recommendations

1– استخدام رتب اعلى للانموذج المختلط ولتوزيعات اخرى.

2– امكانية دراسة السلاسل الزمنية متعددة المتغيرات في الدراسات المستقبلية

المراجع:–

1) المخلافي،فؤاد عبده اسماعيل (2003)"طرائق تشخيص نماذج السلاسل الزمنية المختلطة في الرتب الدنيا "اطروحة دكتوراه في الاحصاء-كلية الادارة والاقتصاد- الجامعة المستنصرية.

2) شيخي , محمد (2011) " طرق القياس الاقتصادي محاضرات وتطبيقات " استاذ وباحث في جامعة ورقلة , الجزائر, الطبعة الاولى ,الحامد.

3) العزاوي ،ماجد رشيد .(2001) حول بعض خصائص الانموذج المختلط ARMA(1,1) غير الطبيعي، اطروحة دكتوراه في الاحصاء كلية الادارة والاقتصاد،جامعة بغداد.

4) امين ابراهيم ادم (2005) ،المبادئ الاساسية الاحصائية في الطرق التطبيقية اللامعلمية ، كلية المعلمين في مكة المكرمة.

5) Box, G.E.P. and Jenkins , G.M. (1976), "Time Series Analysis Forecasting and control", Holden day , Londan.

6) Kececioglu, D. (1991). "Reliability Engineering Handbook" (Volume 1).

7) Romea, J.L.," A Goodness Of Fit Test For Small Sample", RAC START,Volume10,Number5, https://src.alionscience.com/pdf/A_DTest .pdf

8) Wei. William, W.S.; (1989), "Time-Series Analysis Univariate And Multivariate Methods", Addison-Wesley Publishing Company Ine.

مصادر البيانات---

9) (www.visualcrossing.com/weather)

Estimate the parameters of the ARMA model when the random error follows the two-parameter exponential distribution

Rawa Malik Hassouni

rawaamalikhassooni@gmail.com

A. Prof. Dr. Ali Yassin Ghani

badrawi66@uomustansiriyah.edu.iq

Abstract

This research deals with one of the types of models suggested by Box Jenkins, which is the ARMA (1,1) mixed model. Which can deal with time series, whether stable or unstable. The model was reviewed and its functions defined when the random error follows the abnormal distribution, and the exponential distribution with two parameters, which is a continuous distribution, was used. The appropriate tests were presented for the study and the parameters of the ARMA (1,1) model were estimated by the greatest possibility method. The parameters of the two-parameter exponential distribution were also estimated by the (MLS) method, and because the system did not have a solution even when using numerical methods, the moment method was resorted to. A set of real data representing wind speed in Iraq was analyzed, showing the appropriateness of the distribution of the data and verifying that the series is almost stable. In diagnosing the model, it was found that the proposed model is ARMA.(1,1)

Key terms: ARMA mixed model, abnormal distribution, time series, two-parameter exponential distribution, parameter estimation.