دراسة نموذج IGARCH في حالة توزيع ثنائي الحد

أ.د. جواد كاظم الموسوي* م. علي ياسين غني**

المستخلص:

تعد دراسة النموذج IGARCH من الدراسات الحديثة في مجال السلاسل الزمنية، وان اهم ما يميز هذه النماذج ان كلا من المتوسط المشروط والتباين المشروط يعتمد على الماضي اي غير ثابتين. وان اغلب هذه الدراسات استخدمت توزيعين متقطعين هما توزيع بواسون وتوزيع ثنائي الحد السالب .

في بحثنا هذا تم اقتراح توزيع ثنائي الحد. ومن ثم دراسته نظريا وتجريبيا وعمليا. وبذلك يهدف البحث الى دراسة السلاسل الزمنية عندما تكون مشاهداتها قيماً صحيحة وتتبع السلسلة الزمنية التوزيع المتقطع المقترح.

لقد تبين في الجانب التجريبي ان النماذج المدروسة في حالة توزيع ثنائي الحد كانت نتائجها افضل مقارنة مع التوزيع الطبيعي.

وفي الجانب العملي فقد اخذت بيانات حقيقية تمثل عدد التواؤم الاسبوعي في مستشفى ابن البلدي للنسائية والتوليد وكانت البيانات تتبع توزيع ثنائي الحد وتعاني ايضا من مشكلة عدم تجانس التباين المشروط للخطأ، وتم ازالة تأثير المشكلة بمطابقة النموذج IGARCG(1,1).

Abstact

IGARCH model study is one of the recent studies in the field of time series, and that the most important characteristic of these models to both conditional mean and conditional variance depends on the past. And most of these studies used two distributions Poisson and the negative binomial.

In our research, we suggest binomial distribution. And then study the distribution proposed theoretically, empirically and practically. Thus the goal of the research is to study the time series when observations are integer values and follows the time series of GARCH model in discrete distributions.

The results of the experimental side in binomial distribution was good for this model compared with the normal distribution.

In practical side examined one time series data, application are real data represents the number of twins weekly Ebin - Albaladi hospital obstetrics and Gynecology and data following binomial distribution and also suffers from the problem of heteroscedasticity of the conditional variance of error, and remove the influence problem matching IGARCG(1,1)model.

* الجامعة المستنصرية / كلية الادارة والاقتصاد .
** الجامعة المستنصرية / كلية الادارة والاقتصاد .

مقبول للنشر بتأريخ 2015/9/9
مستل من أطروحة دكتوراة

المقدمة:

في عام 2006 يعد الباحثون Ferland, Latour &Oraichi[2] اول من درس نماذج ARCH في حالة التوزيعات المتقطعة وسمي نموذج (IARCH) وقد استخدم الباحثون توزيع Poisson في عملية النمذجة، وقدموا نموذج الانحدار الذاتي بعدم تجانس التباين المشروط للاعداد الصحيحة(integer). وفي عام 2011 قدم Zhu[7] نموذج IGARCH باستخدام توزيع ثنائي الحد السالب للسلاسل الزمنية ذات البيانات المتقطعة التي تحوي قيما متطرفة، ودرس دالة الارتباط الذاتي وشروط الاستقرارية.

توزيع ثنائي الحد (Binomial Distribution)

تم اقتراح هذا النموذج من قبل الباحثين لدراسة نموذج IGARCH في السلاسل الزمنية ذات القيم الصحيحة، وفيما يأتي وصف تفصيلي لهذا النموذج.

ليكن X_t متغيرا عشوائيا يتبع توزيع ثنائي الحد المشروط بالمعلومات السابقة F_{t-1} بالمعلمتين (g, θ_t) حيث ان $(0<\theta_t<1)$ وتمثل احتمال النجاح، وان g يمثل الحد الاعلى لعدد حالات النجاح وهو عددا صحيحا غير سالب، x_t يمثل عدد حالات النجاح، فان دالة الكثافة الاحتمالية المشروطة تكون:

$$P(X_t = x_t \backslash F_{t-1}) = C^{g}_{x_t}\, \theta_t^{x_t}(1-\theta_t)^{g-x_t},\ \ x_t = 0,1,2,3,\ldots..g \qquad (1)$$

وان المتوسط المشروط والتباين المشروط يكونان بافتراض $[\lambda_t = g\theta_t]$:

$$E(X_t \backslash F_{t-1}) = g\theta_t = \lambda_t \qquad (2)$$

$$Var(X_t \backslash F_{t-1}) = g\theta_t(1-\theta_t) = \lambda_t\left(1-\frac{\lambda_t}{g}\right) \qquad (3)$$

وعلى فرض ان λ_t معرفة كالاتي:

$$\lambda_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \lambda_{t-j} \quad , \quad t \geq \max(m,s) \qquad (4)$$

وان $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$. والمعادلة (4) تمثل نموذج GARCH(m,s) للاعداد الصحيحة (Integer) يرمز له IGARCH(m,s)، وهيكله يشبه نموذج GARCH(m,s) المعتاد، وهو النموذج الذي يحدد العلاقة بين المتوسط الشرطي والقيم السابقة لـ X_t و λ_t . وشرط الاستقرارية للنموذج هـــو:

$$0 < \sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j < 1 \qquad (5)$$

وبالامكان كتابة الاتي:

$$X_t = \lambda_t + (X_t - \lambda_t) \qquad (6)$$

وعلى فرض ان الخطأ هو:

$$\epsilon_t = X_t - \lambda_t \qquad (7)$$

فان:

$$X_t = \lambda_t + \epsilon_t \qquad (8)$$

والتوقع الرياضي لـ X_t يكون:

$$E(X_t) = E[E(X_t \backslash F_{t-1})] = E(\lambda_t) \qquad (9)$$

خصائص السلسلة ϵ_t

1. المتوسط الثابت:

$$E(\epsilon_t) = 0 \qquad (10)$$

البرهان:

$$\begin{aligned} E(\epsilon_t) &= E[E(\epsilon_t \backslash F_{t-1})] = E[E\{(X_t-\lambda_t)\backslash F_{t-1}\}] \\ &= E[E\{(X_t-\lambda_t)\backslash F_{t-1}\}] \\ &= E[E(X_t \backslash F_{t-1}) - E(\lambda_t \backslash F_{t-1})] \\ &= E(\lambda_t - \lambda_t) = 0 \end{aligned}$$

2. التباين الثابت:

$$Var(\epsilon_t) = E(\lambda_t) - \frac{E(\lambda_t^2)}{g} \qquad (11)$$

البرهان:

$$Var(\epsilon_t) = E(\lambda_t) - \frac{E(\lambda_t^2)}{g} = Var[E(\epsilon_t \backslash F_{t-1})] + E[Var(\epsilon_t \backslash F_{t-1})]$$

$$= Var[E(\epsilon_t \backslash F_{t-1})] + E[Var(\epsilon_t \backslash F_{t-1})]$$
$$= 0 + E[Var((X_t - \lambda_t) \backslash F_{t-1})]$$
$$= E[Var(X_t \backslash F_{t-1}) + E[Var(\lambda_t \backslash F_{t-1})]]$$

وحيث ان λ_t بدلالة الزمن t-1 فانها معلومة ويكون تباينها صفراً، فالحد الثاني من المعادلة اعلاه يساوي صفراً.

$$Var(\epsilon_t) = E[Var(X_t \backslash F_{t-1})]$$
$$= E\left[\lambda_t\left(1 - \frac{\lambda_t}{g}\right)\right]$$
$$= E(\lambda_t) - \frac{E(\lambda_t^2)}{g}$$

3. السلسلة غير المترابطة: عندما h > 0

$$Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t+h}) = 0 \qquad (12).$$

البرهان:

$$Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t+h}) = E(\epsilon_t, \epsilon_{t+h})$$
$$= E[\epsilon_t(\epsilon_{t+h} \backslash F_{t+h-1})] = 0$$

من الخصائص اعلاه فان ϵ_t يمثل متغيرا عشوائيا نقيا او ما يعرف بالتشويش الابيض (White Noise).

وباخذ التوقع الرياضي لمعادلة λ_t فان متوسط X_t يكون :

$$E(X_t) = \mu = \alpha_0/\left(1 - \sum_{i=1}^{m}\alpha_i - \sum_{j=1}^{s}\beta_j\right) \qquad (13)$$

البرهان:

$$E(\lambda_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i E(X_{t-i}) + \sum_{j=1}^{s}\beta_j E(\lambda_{t-j})$$

وعندما تكون X_t مستقرة فان:

$$E(\lambda_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i E(X_t) + \sum_{j=1}^{s}\beta_j E(\lambda_t)$$

وحيث $E(X_t) = E(\lambda_t)$ فان:

$$E(X_t) - \sum_{i=1}^{m}\alpha_i E(X_t) - \sum_{j=1}^{s}\beta_j E(X_t) = \alpha_0$$
$$E(X_t) = \mu = \alpha_0/\left(1 - \sum_{i=1}^{m}\alpha_i - \sum_{j=1}^{s}\beta_j\right)$$

بشرط ان يكون $0 < \sum_{i=1}^{m}\alpha_i + \sum_{j=1}^{s}\beta_j < 1$، وبتعويض $E(X_t)$ اعلاه في معادلة λ_t نحصل على:

$$X_t - \epsilon_t = E(X_t)\left(1 - \sum_{i=1}^{m}\alpha_i - \sum_{j=1}^{s}\beta_j\right) + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{s}\beta_j(X_{t-j} - \epsilon_{t-j})$$
$$X_t - E(X_t) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i[X_{t-i} - E(X_t)] + \sum_{j=1}^{s}\beta_j[X_{t-j} - E(X_t)] + \epsilon_{t-j} - \sum_{j=1}^{s}\beta_j\epsilon_{t-j}$$
$$X_t - E(X_t) = \sum_{i=1}^{r}(\alpha_i + \beta_i)[X_{t-i} - E(X_t)] + \epsilon_t - \sum_{j=1}^{s}\beta_j\epsilon_{t-j}$$

حيث $r = \max(m, s)$.

ان المعادلة اعلاه تمثل نموذج ARMA(r,m) بالمعلمـــــات $\theta_j = \beta_j$ و $\phi_i = (\alpha_i + \beta_i)$.

وفي حالة النموذج $m = s = 1$ فان:

- المتوسط :

$$E(X_t) = \mu = \alpha_0/(1 - \alpha_1 - \beta_1) \qquad (14)$$

- دالة التغاير الذاتي (Auto Covariance):

$$Cov(X_t, X_{t-h}) = \begin{cases} \dfrac{1-(\alpha_1+\beta_1)^2+\alpha_1^2}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2+\alpha_1^2/g}\left[\mu + \dfrac{\mu^2}{g}\right] & , \ h = 0 \\ \dfrac{\alpha_1[1-\beta_1(\alpha_1+\beta_1)](\alpha_1+\beta_1)^{h-1}}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2+\alpha_1^2/g}\left[\mu + \dfrac{\mu^2}{g}\right] & , \ h \geq 1 \end{cases} \qquad (15)$$

- دالة الارتباط الذاتي (Auto Correlation) :

$$Corr(X_t, X_{t-h}) = \frac{\alpha_1[1-\beta_1(\alpha_1+\beta_1)](\alpha_1+\beta_1)^{h-1}}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2+\alpha_1^2} \qquad (16)$$

- تباين ϵ_t :

$$Var(\epsilon_t) = \frac{1-(\alpha_1+\beta_1)^2}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2+\alpha_1^2/g}\left[\mu + \frac{\mu^2}{g}\right] \qquad (17)$$

البرهان:

ان النموذج المستخدم هو:

$$\lambda_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \beta_1 \lambda_{t-1}$$

لذا فان:

$$E(\lambda_t^2) = E[\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \beta_1 \lambda_{t-1} + \alpha_1 \lambda_{t-1} - \alpha_1 \lambda_{t-1}]^2$$
$$= E[\{\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\lambda_{t-1}\} + \alpha_1 (X_{t-1} - \lambda_{t-1})]^2$$
$$= E[\{\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\lambda_{t-1}\} + \alpha_1 \epsilon_{t-1}]^2$$
$$= E[\{\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\lambda_{t-1}\}^2 + (\alpha_1 \epsilon_{t-1})^2 + 2\{\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\lambda_{t-1}\}\alpha_1 \epsilon_{t-1}]$$

ان توقع الحد الاخير يساوي صفراً لان ϵ_{t-1} و λ_{t-1} مستقلان كون λ_{t-1} بدلالة الزمن (t-2). وعند الاستقرارية فان $E(\lambda_t) = E(\lambda_{t-1})$ و $E(\lambda_t^2) = E(\lambda_{t-1}^2)$

$$E(\lambda_t^2) = \alpha_0^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^2 E(\lambda_t^2) + 2\alpha_0(\alpha_1 + \beta_1)E(\lambda_t) + \alpha_1^2 \mu - \alpha_1^2 \frac{E(\lambda_t^2)}{g}$$
$$= \frac{\alpha_0^2 + 2\alpha_0(\alpha_1 + \beta_1)\mu + \alpha_1^2 \mu}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \frac{\alpha_1^2}{g}}$$
$$= \frac{\mu^2(1 - \alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_1 + \beta_1)\mu^2(1 - \alpha_1 - \beta_1) + \alpha_1^2 \mu}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \frac{\alpha_1^2}{g}}$$
$$= \frac{\mu^2\{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2\} + \alpha_1^2 \mu}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \frac{\alpha_1^2}{g}}$$

وتعوض هذه النتيجة بالمقدار

$$Var(\epsilon_t) = E(\lambda_t) - \frac{E(\lambda_t^2)}{g}$$

فيكون:

$$Var(\epsilon_t) = \mu - \frac{1}{g}\frac{\mu^2\{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2\} + \alpha_1^2 \mu}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \frac{\alpha_1^2}{g}}$$
$$= \frac{\mu\left\{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \frac{\alpha_1^2}{g}\right\} - \frac{1}{g}[\mu^2\{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2\} + \alpha_1^2 \mu]}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \frac{\alpha_1^2}{g}}$$
$$= \frac{\{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2\}}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \frac{\alpha_1^2}{g}}\left(\mu - \frac{\mu^2}{g}\right)$$

تقدير المعلمات :

تقدر المعلمات بطريقة الامكان الاعظم، ويتم اخذ اللوغارتم الطبيعي لدالة الكثافة الاحتمالية المشروطة لتوزيع ثنائي الحد وبذلك نحصل على:

$$l_t = ln\left(P(X_t = x_t \backslash F_{t-1})\right) = x_t ln(\theta_t) + (g - x_t) ln(1 - \theta_t) + ln\left(C_{x_t}^g\right) \quad (18)$$

وبدلالة λ_t :

$$l_t = x_t ln(\lambda_t) + (g - x_t) ln(g - \lambda_t) - x_t ln(g) - (g - x_t) ln(g) + ln\left(C_{x_t}^g\right) \quad (19)$$

وحساب المشتقات الاتية:

- مشتقة لوغارتم دالة الكثافة الاحتمالية المشروطة للمتغير X_t بالنسبة الى α_0

$$\frac{\partial l_t}{\partial \alpha_0} = \left[\frac{x_t}{\lambda_t} - \frac{g - x_t}{g - \lambda_t}\right]\frac{\partial \lambda_t}{\partial \alpha_0} \quad (20)$$
$$\frac{\partial \lambda_t}{\partial \alpha_0} = 1 + \sum_{k=1}^{s} \beta_k \frac{\partial \lambda_{t-k}}{\partial \alpha_0} \quad (21)$$
$$t = 1, 2, \dots, n$$

- مشتقة لوغارتم دالة الكثافة الاحتمالية المشروطة للمتغير X_t بالنسبة الى α_i

$$\frac{\partial l_t}{\partial \alpha_i} = \left[\frac{x_t}{\lambda_t} - \frac{g - x_t}{g - \lambda_t}\right]\frac{\partial \lambda_t}{\partial \alpha_i} \quad (22)$$
$$\frac{\partial \lambda_t}{\partial \alpha_i} = x_{t-i} + \sum_{k=1}^{s} \beta_k \frac{\partial \lambda_{t-k}}{\partial \alpha_i} \quad (23)$$
$$t = 1, 2, \dots, n \ , \ i = 1, 2, \dots, m$$

- مشتقة لوغارتم دالة الكثافة الاحتمالية المشروطة للمتغير X_t بالنسبة الى β_j

$$\frac{\partial l_t}{\partial \beta_j} = \left[\frac{x_t}{\lambda_t} - \frac{g-x_t}{g-\lambda_t}\right]\frac{\partial \lambda_t}{\partial \beta_j} \qquad (24)$$

$$\frac{\partial \lambda_t}{\partial \beta_j} = \lambda_{t-j} + \sum_{k=1}^{s} \beta_k \frac{\partial \lambda_{t-k}}{\partial \beta_j} \qquad (25)$$

$$t = 1, 2, \dots, n \quad , \quad j = 1, 2, \dots, s$$

ويتم التقدير بطريقة BHHH التكرارية. وهي احدى الطرق العددية المشتقة من طريقة Newton-Raphson التكرارية التي وجدها الباحثين (Berndt, Hall, Hall and Hausman) المعروفة التي يقدر بها متجه المعلمات ($\psi = [\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_m \beta_1 \dots \beta_s]'$) وفق الصيغة الاتية:

$$\psi_{k+1} = \psi_k + B_k^{-1} V_k \qquad (26)$$

اذ ان: ψ_k متجه المعلمات في الدورة k.

ψ_{k+1} متجه المعلمات في الدورة k+1.

V_k متجه المشتقة الاولى في الدورة k وبالصيغة:

$$V_k = \sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\partial l_t}{\partial \phi_0}\frac{\partial l_t}{\partial \phi_1}\dots\dots\frac{\partial l_t}{\partial \theta_q}\frac{\partial l_t}{\partial \alpha_0}\frac{\partial l_t}{\partial \alpha_1}\dots\dots\frac{\partial l_t}{\partial \beta_s}\right)' \qquad (27)$$

B_k مصفوفة المشتقة الثانية في الدورة k وبالصيغة:

$$B_k = \sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\partial l_t}{\partial \phi_0}\frac{\partial l_t}{\partial \phi_1}\dots\frac{\partial l_t}{\partial \theta_q}\frac{\partial l_t}{\partial \alpha_0}\frac{\partial l_t}{\partial \alpha_1}\dots\frac{\partial l_t}{\partial \beta_s}\right)'\left(\frac{\partial l_t}{\partial \phi_0}\frac{\partial l_t}{\partial \phi_1}\dots\frac{\partial l_t}{\partial \theta_q}\frac{\partial l_t}{\partial \alpha_0}\frac{\partial l_t}{\partial \alpha_1}\dots\frac{\partial l_t}{\partial \beta_s}\right) \qquad (28)$$

ويعاد تكرار تقدير المعلمات حتى تتقارب المقدرات بين دورتين متتالتين بفرق صغير يحدده الباحث مثل 0.0001.

نتائج تجربة المحاكاة

تم تصميم تجربة محاكاة لثلاث نماذج واختيار ثلاث قيم افتراضية للمعلمات لكل نموذج والموصوفة في الجدول الاتي :

جدول (1)

يبين القيم الافتراضية المستخدمة في تجارب المحاكاة لتوليد معلمات النماذج المقترحة

Model	Parameters														
	Case 1					Case 2					Case 3				
	g	α0	α1	α2	β1	g	α0	α1	α2	β1	g	α0	α1	α2	β1
GARCH(1,0)	30	3	0.15	-	-	10	4	0.5	-	-	20	1	0.9	-	-
GARCH(2,0)	20	2	0.4	0.5	-	40	4	0.1	0.2	-	30	5	0.2	0.3	-
GARCH(1,1)	22	4	0.3	-	0.5	14	2	0.7	-	0.15	32	5	0.2	-	0.3

ومن ثم المقارنة بين مقدرات التوزيع الطبيعي ومقدرات توزيع ثنائي الحد، حيث تم توليد السلسلة الزمنية باستخدام مولد الاعداد العشوائية وفق الخوارزمية الاتية:

اختار (g) من القيم العشوائية التي تتبع توزيع uniform(0,1)، وعدد القيم التي تقل عن (p) تمثل رقماً عشوائياً لتوزيع Binomial(g,p).

وبعد تنفيذ التجربة تم مقارنة النتائج بين توزيع ثنائي الحد والتوزيع الطبيعي حسب معيار متوسط مربعات الخطأ ومعيار معدل المقدر وللنماذج كافة. وتم عرض النتائج التي تم الحصول عليها كما في الجداول المرقمة من (2) الى (4). اما خلاصة هذه النتائج فقد وضعت في الجدول (5) والذي من خلاله يتضح ان المقدرات لمجمل النماذج ولمجمل احجام العينات المدروسة تقترب من توزيع ثنائي الحد بنسبة 87%، وبنسبة 93% لنموذجي GARCH(1,1) و GARCH(2,0)، وبنسبة 73% لنموذج GARCH(1,0) لجميع احجام العينات.

كما يلاحظ ان ميل المقدرات للتوزيع الطبيعي تزداد مع ازدياد حجم العينة بشكل عام وهذا يتفق مع نظرية الغاية المركزية. الا انه يلاحظ من خلال الجداول المرقمة من (2) الى (4) تفوق مقدرات توزيع ثنائي الحد بنسبة 100% في حالة حجمي العينتين 50 و 100 مشاهدة ومن ثم ينخفض الى 89% عند حجم

العينة **250** مشاهدة و**67%** عند حجم العينة **500** مشاهدة ومن ثم ترتفع النسبة الى **78%** عند حجم عينة **750** مشاهدة.

جدول (2)

نتائج المحاكاة لنموذج GARCH(1,0)

	n	P	APV	Normal		Binomial		RE
				E(P)	MSE	E(P)	MSE	
Case 1 (g = 30)	50	α0	3	3.123353	0.3192629	2.972963	0.1574927	0.493301
		α1	0.15	0.1109038	0.0218022	0.1474938	9.52E-03	0.436714
	100	α0	3	3.068556	0.160207	2.995863	9.75E-02	0.6083626
		α1	0.15	0.1276971	1.09E-02	0.1447974	6.34E-03	0.5801358
	250	α0	3	3.027723	6.02E-02	3.010942	5.13E-02	0.8529823
		α1	0.15	0.1421201	4.01E-03	0.1462086	3.35E-03	0.8346925
	500	α0	3	3.011781	0.0334284	3.012501	3.66E-02	1.094211
		α1	0.15	0.146553	2.28E-03	0.1466421	2.37E-03	1.040104
	750	α0	3	3.005868	2.22E-02	3.010068	2.66E-02	1.198609
		α1	0.15	0.148922	1.51E-03	0.1481549	1.79E-03	1.188574
Case 2 (g = 10)	50	α0	4	4.35068	1.231763	4.124478	0.4791069	0.3889603
		α1	0.5	0.4508439	1.79E-02	0.4786048	7.13E-03	0.3973414
	100	α0	4	4.213093	0.6318272	4.128018	0.4308406	0.6818963
		α1	0.5	0.471201	8.97E-03	0.4817818	6.17E-03	0.6878574
	250	α0	4	4.05994	0.2307845	4.049859	0.2546254	1.103304
		α1	0.5	0.4917576	3.25E-03	0.493259	3.53E-03	1.086095
	500	α0	4	4.019403	0.1155037	4.028639	0.1373639	1.18926
		α1	0.5	0.4968669	1.63E-03	0.4959183	1.90E-03	1.167861
	750	α0	4	4.049061	8.86E-02	4.043136	8.76E-02	0.9891429
		α1	0.5	0.4933786	1.28E-03	0.4941965	1.24E-03	0.9685552
Case 3 (g = 20)	50	α0	1	1.370459	0.8084295	1.267783	0.2746791	0.3397688
		α1	0.9	0.832977	1.16E-02	0.8439269	7.15E-03	0.6183025
	100	α0	1	1.190252	0.27043	1.17664	0.1766865	0.6533539
		α1	0.9	0.8705426	3.00E-03	0.871297	2.71E-03	0.9028304
	250	α0	1	1.07305	9.60E-02	1.052186	6.54E-02	0.6811902
		α1	0.9	0.8886445	8.94E-04	0.8908729	6.73E-04	0.7523627
	500	α0	1	1.036518	4.41E-02	1.011247	2.45E-02	0.5553413
		α1	0.9	0.8937868	3.93E-04	0.8960994	2.03E-04	0.5169678
	750	α0	1	1.035987	2.84E-02	1.00838	8.63E-03	0.3033954
		α1	0.9	0.8956233	2.20E-04	0.8980335	5.278E-05	0.2397574

n: حجم العينة ، P : المعلمات ، APV: القيمة الافتراضية للمعلمة ، E(P): متوسط قيم المعلمة القدرة ، MES : متوسط مربعات الخطأ ، RE : الكفاءة النسبية .

جدول (3)

نتائج المحاكاة لنموذج GARCH(2,0)

	n	P	APV	Normal		Binomial		RE
				E(P)	MSE	E(P)	MSE	
Case 1 (g = 20)	50	α0	2	1.646734	0.8600256	1.918549	7.31E-02	8.50E-02
		α1	0.4	0.6660286	9.45E-02	0.615435	6.82E-02	0.721482
		α2	0.5	0.2288352	0.0232591	0.2812952	6.82E-02	2.930678
	100	α0	2	1.577928	0.6689076	1.949432	5.84E-03	8.73E-03
		α1	0.4	0.6896493	0.1038429	0.6310854	7.11E-02	0.6844739
		α2	0.5	0.2216518	2.27E-02	0.2711624	7.11E-02	3.124725
	250	α0	2	1.687541	0.6319147	1.955551	1.97E-03	3.11E-03
		α1	0.4	0.7173651	0.1178558	0.6556618	8.10E-02	0.687493
		α2	0.5	0.1945255	2.02E-02	0.2465581	8.10E-02	4.016217
	500	α0	2	1.705201	0.6082226	1.955551	1.96E-03	3.23E-03
		α1	0.4	0.7150847	0.1155443	0.6534323	7.89E-02	0.6828019
		α2	0.5	0.1977121	1.91E-02	0.2487877	7.89E-02	4.121133
	750	α0	2	1.655784	0.5823795	1.955551	1.97E-03	3.38E-03
		α1	0.4	0.7253535	0.1223694	0.6634332	8.48E-02	0.6929445
		α2	0.5	0.1905446	1.92E-02	0.2387869	8.48E-02	4.409076
Case 2 (g = 40)	50	α0	4	4.512524	1.844535	4.001144	0.4392985	0.2381622
		α1	0.1	6.52E-02	2.36E-02	0.1168496	1.48E-02	0.6281539
		α2	0.2	0.1445048	2.19E-02	0.1784741	1.48E-02	0.6761445
	100	α0	4	4.224627	0.6316507	3.985263	0.305736	0.484027
		α1	0.1	8.74E-02	1.12E-02	0.1142185	9.65E-03	0.8612689
		α2	0.2	0.1685914	9.58E-03	0.1824651	9.65E-03	1.006858
	250	α0	4	4.076427	0.2575542	3.961385	0.1680989	0.6526738
		α1	0.1	9.80E-02	4.35E-03	0.1092634	4.07E-03	0.9360659
		α2	0.2	0.1868608	3.81E-03	0.1949358	4.07E-03	1.066525
	500	α0	4	4.020956	0.1143616	3.95872	9.35E-02	0.8171885
		α1	0.1	9.90E-02	1.89E-03	0.1047923	1.99E-03	1.049463
		α2	0.2	0.1955108	1.85E-03	0.2001881	1.99E-03	1.074386
	750	α0	4	4.003464	7.83E-02	3.953145	0.0598487	0.764178
		α1	0.1	9.96E-02	1.41E-03	0.103865	1.12E-03	0.7945814
		α2	0.2	0.2002008	1.05E-03	0.204331	1.12E-03	1.06677
Case 3 (30)	50	α0	5	5.788731	3.446687	5.198272	0.5478686	0.1589551
		α1	0.2	0.1776372	2.02E-02	0.2076588	1.39E-02	0.6849728
		α2	0.3	0.2340915	1.71E-02	0.261801	1.39E-02	0.8119182
	100	α0	5	5.384755	1.608743	5.130565	0.4567232	0.2839007
		α1	0.2	0.1949208	1.03E-02	0.2077841	8.33E-03	0.8112366
		α2	0.3	0.2595646	9.57E-03	0.2714163	8.33E-03	0.8705218
	250	α0	5	5.194591	0.6295731	5.121688	0.4013169	0.6374429
		α1	0.2	0.1958625	3.94E-03	0.1990481	3.41E-03	0.8649536
		α2	0.3	0.2832765	3.61E-03	0.2869316	3.41E-03	0.9443222
	500	α0	5	5.07216	0.3016486	5.053593	0.2919825	0.9679558
		α1	0.2	0.1978532	1.99E-03	0.1988244	2.03E-03	1.02005
		α2	0.3	0.293914	2.07E-03	0.2947845	2.03E-03	0.9808311
	750	α0	5	5.098794	0.2147851	5.064876	0.1896453	0.8829538
		α1	0.2	0.194678	1.19E-03	0.1967934	1.25E-03	1.054641
		α2	0.3	0.2949803	1.26E-03	0.2961883	1.25E-03	0.99417

n: حجم العينة ، P : المعلمات ، APV: القيمة الافتراضية للمعلمة ، E(P): متوسط قيم المعلمة القدرة ، MES : متوسط مربعات الخطأ ، RE : الكفاءة النسبية

جدول (4)

نتائج المحاكاة لنموذج GARCH(1,1)

	n	P	APV	Normal		Binomial		RE
				E(P)	MSE	E(P)	MSE	
Case 1 (g = 22)	50	α0	4	4.483066	6.250755	3.985636	0.0122027	1.95E-03
		α1	0.3	0.5829034	9.51E-02	0.156467	2.97E-02	0.3122363
		β1	0.5	0.1783909	3.92E-02	0.6441586	9.02E-03	0.2300033
	100	α0	4	4.436944	3.060883	3.995678	4.64E-03	1.52E-03
		α1	0.3	0.5275593	6.15E-02	0.2039138	1.56E-02	0.2534678
		β1	0.5	0.2435833	2.19E-02	0.5965017	6.34E-03	0.2897983
	250	α0	4	4.205812	1.775709	3.999684	2.00E-03	1.12E-03
		α1	0.3	0.4391253	2.41E-02	0.2506411	5.20E-03	0.2156773
		β1	0.5	0.3478951	1.13E-02	0.5495856	2.76E-03	0.243987
	500	α0	4	4.301978	1.235619	3.99843	9.84E-04	7.97E-04
		α1	0.3	0.3890503	1.02E-02	0.277165	1.97E-03	0.1923168
		β1	0.5	0.3944001	6.26E-03	0.5229243	1.45E-03	0.2310533
	750	α0	4	4.175744	0.665304	4.00104	6.27E-04	9.43E-04
		α1	0.3	0.3635033	5.42E-03	0.2811692	1.38E-03	0.2540444
		β1	0.5	0.4268253	3.64E-03	0.5188962	1.02E-03	0.2808949
Case 2 (g = 14)	50	α0	2	2.523081	2.547191	1.657288	0.4742578	0.1861885
		α1	0.7	0.7780667	2.89E-02	0.4117181	0.1060554	3.675574
		β1	0.15	1.68E-02	3.81E-02	0.4651104	1.93E-02	0.5071036
	100	α0	2	2.365059	1.549919	1.533666	0.4651078	0.3000852
		α1	0.7	0.7644983	2.07E-02	0.4921449	5.64E-02	2.726669
		β1	0.15	5.06E-02	2.45E-02	0.3933874	1.07E-02	0.4384243
	250	α0	2	2.353556	1.04236	1.575376	0.4702924	0.4511804
		α1	0.7	0.7424867	0.0100512	0.5761839	2.12E-02	2.107503
		β1	0.15	0.0783556	1.27E-02	0.3058642	3.95E-03	0.3103555
	500	α0	2	2.248952	0.6064194	1.612568	0.4751188	0.7834822
		α1	0.7	0.7345192	6.55E-03	0.6286185	8.53E-03	1.301309
		β1	0.15	9.55E-02	7.85E-03	0.2501864	2.33E-03	0.2969768
	750	α0	2	2.204155	0.374889	1.713337	0.4792881	1.27848
		α1	0.7	0.7200163	3.84E-03	0.6438345	5.90E-03	1.53839
		β1	0.15	0.1139518	5.06E-03	0.2275666	1.52E-03	0.3001753
Case 3 (32)	50	α0	5	8.615135	50.19957	4.853535	0.5728694	1.14E-02
		α1	0.2	0.1831489	0.030269	0.1664095	1.45E-02	0.4806194
		β1	0.3	-5.16E-02	0.4086709	0.3466725	2.17E-02	5.32E-02
	100	α0	5	7.768654	33.0485	4.938667	0.5904116	0.017865
		α1	0.2	0.19393	1.18E-02	0.1783215	9.42E-03	0.8009278
		β1	0.3	2.39E-02	0.2547772	0.3262122	1.64E-02	6.44E-02
	250	α0	5	6.265903	13.70592	4.921237	0.5805618	4.24E-02
		α1	0.2	0.1983759	4.46E-03	0.1906284	4.15E-03	0.9305733
		β1	0.3	0.1735718	0.1187097	0.3162517	1.10E-02	9.27E-02
	500	α0	5	5.541275	4.233735	4.964084	0.5848762	0.1381466
		α1	0.2	0.2015651	1.76E-03	0.197898	1.62E-03	0.9256275
		β1	0.3	0.2434186	4.40E-02	0.3050645	8.15E-03	0.1851023
	750	α0	5	5.269657	2.187821	4.941079	0.525733	0.2402998
		α1	0.2	0.19944	1.19E-03	0.1968982	1.13E-03	0.9470821
		β1	0.3	0.2730612	2.43E-02	0.308572	7.12E-03	0.292929

n: حجم العينة ، P : المعلمات ، APV: القيمة الافتراضية للمعلمة ، E(P): متوسط قيم المعلمة القدرة ،
MES : متوسط مربعات الخطأ ، RE : الكفاءة النسبية

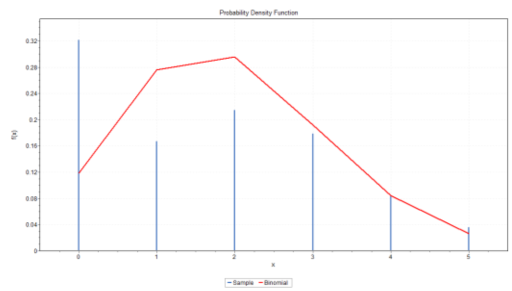
جدول (5)

مقارنة توزيع ثنائي الحد مع التوزيع الطبيعي

Model \ Case n	50			100			250			500			750			Binomial	
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	Total	Percent
GARCH(1,0)	B	B	B	B	B	B	B	N	B	N	N	B	N	B	B	11	73%
GARCH(2,0)	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	N	B	B	B	B	14	93%
GARCH(1,1)	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	N	B	14	93%
Binomial Total	9			9			8			6			7			39	
Binomial Percent	100%			100%			89%			67%			78%			87%	
B=Binomial , N=Normal																	

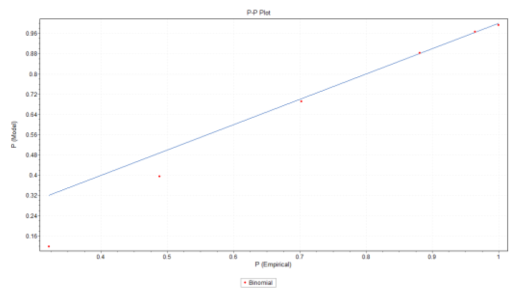
التطبيق

تم اخذ عينة بحجم 84 مشاهدة تمثل عدد ولادة التواؤم اسبوعياً في مستشفى ابن البلدي-بغداد للمدة من 2014-1-1 ولغاية 2015-8-3. وتم تبويب البيانات ورسم المدرج التكراري مع منحنى توزيع Binomial(12,0.163) والموضح بالشكل (1). كما تم ادراج الرسم البياني الاحتمالي والموضح بالشكل (2). ويظهر من الشكلين ان البيانات تتبع بشكل تقريبي توزيع ثنائي الحد.



الشكل (1)

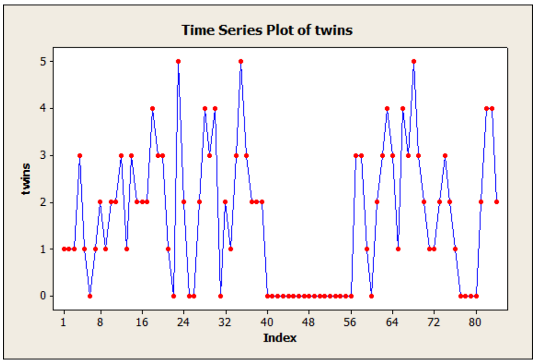
يوضح المدرج التكراري ومنحنى توزيع ثنائي الحد لبيانات التوائم



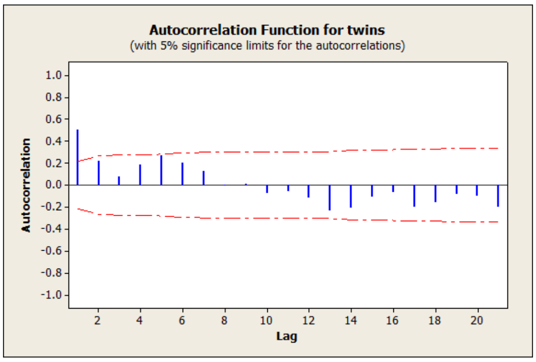
الشكل (2)

يوضح الرسم البياني الاحتمالي لتوزيع ثنائي الحد لبيانات التوائم

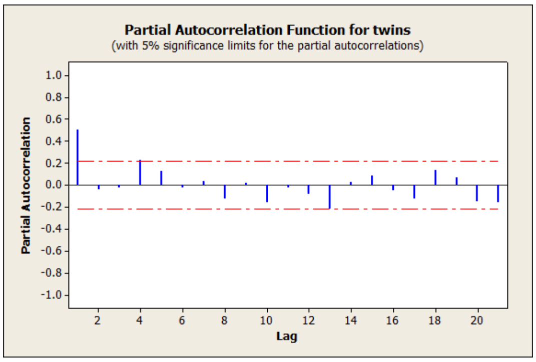
ومن ثم رسمت السلسلة الزمنية لبيانات التوائم كما في الشكل (3) ودالتي الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي كما في الشكلين (4) و (5) على التوالي حيث يتبين بوضوح وجود الاعتماد المتسلسل في البيانات .



الشكل (3)
يوضح السلسلة الزمنية لبيانات التوائم



الشكل (4)
يوضح دالة الارتباط الذاتي لبيانات التوائم



الشكل (5)
يوضح دالة الارتباط الذاتي الجزئي لبيانات التوائم

وتم اجراء اختبار Lagrange Multiplier للبيانات كما في الصيغة الاتية:

$$LM = nR^2 \sim \chi^2_{(u)} \qquad (29)$$

حيث n تمثل حجم العينة و R^2 يمثل معامل التحديد. والاختبار يعادل احصاءة F لاختبار الفرضية:

$$H_0: \omega_1 = \omega_2 = \cdots . = \omega_u$$

لمعادلة الانحدار الاتية:

$$a_t^2 = \omega_0 + \omega_1 a_{t-1}^2 + \cdots . + \omega_u a_{t-u}^2 + e_t \quad , \quad t = u+1, \ldots . , n \qquad (30)$$

وترفض فرضية العدم عند مستوى معنوية معين (α) عندما يكون $LM > \chi^2_{(u)}$.

ويتضح من الجدول (6) وان جميع فرضيات العدم قد رفضت مما يوكد النتيجة السابقة بوجود الاعتماد المتسلسل في البيانات.

جدول (6)
يوضح اختبار Lagrange Multiplier لبيانات التوائم

p	LM	$Chi^2(0.05,n)$	Decision
6	24.57	12.59	Reject H0
5	25.04	11.07	Reject H0
4	23.68	9.49	Reject H0
3	20.17	7.81	Reject H0
2	20.50	5.99	Reject H0
1	20.75	3.84	Reject H0

ولاجل ازالة تأثير الاعتماد المتسلسل تم مطابقة النماذج IGARCH(0,1) وGARCH(0,2) وIGARCH(1,1) وادرجت نتائجها في الجدول (7) ويتبين من خلاله ان النموذج IGARCH(1,1) هو الافضل لكونه يمتلك اقل قيمة لمعيار AIC.

جدول (7)
يوضح تقدير المعلمات للنماذج المدروسة

g	α0	α1	α2	β1	Ln(likeliho	AIC
12	.731	.552	-	-	-130.209	3.1478
12	.692	.545	.033	-	-130.141	3.1462
12	.473	.498	-	.214	-129.976	3.1423

وتم حساب البواقي القياسية حسب صيغة **Person** الاتية[7]:

$$PR = \frac{x_t - E(x_t \backslash F_{t-1})}{\sqrt{Var(x_t \backslash F_{t-1})}} \qquad (31)$$

واجراء اختبار **Lagrange Multiplier** الذي وضعت نتائجة في الجدول (8). وقد تم قبول جميع فرضيات العدم مما يدل على ازالة تأثير الاعتماد المتسلسل من البيانات.

جدول (8)
يوضح اختبار Lagrange Multiplier للبواقي القياسية

p	LM	chi^2(0.95,n)	Decision
6	7.25	12.59	Accept Ho
5	7.43	11.07	Accept Ho
4	4.80	9.49	Accept Ho
3	3.40	7.81	Accept Ho
2	1.48	5.99	Accept Ho
1	0.42	3.48	Accept Ho

وبذلك فان النموذج النهائي يكون كالاتي:

$$\lambda_t = 0.473 + 0.498x_{t-1} + 0.214\lambda_{t-1}$$

ونستنتج من النتائج التجريبية ان النماذج IGARCH(0,1) وIGARCH(2,0) وIGARCH(1,1) كانت تمثل البيانات المولدة من توزيع ثنائي الحد بنسبة كبيرة. واظهر الجانب التطبيقي ان نموذج IGARCH(1,1) كان الافضل في مطابقة بيانات عدد ولادة التواؤم الاسبوعي. ونوصي باعتماد أنموذج IGARCH عندما تتبع البيانات توزيع ثنائي الحد وتعاني من مشكلة عدم تجانس التباين المشروط بالمعلومات السابقة. ودراسة نماذج ذات رتب اعلى من النماذج المدروسة في هذا البحث

المصادر:

1- Christou V. (2013), Statistical Theory for Mixed Poisson Time Series Models, Ph.D. University of Cyprus, Department of Mathematics and Statistics.
2- Ferland, R., Latour A., & Oraichi D. (2006), "Integer–Valued GARCH Processes" Journal of Time Series Analysis, Vol. 27, pp 923–942.
3- Fokianos K. (2012), "Count Time Series Models" Handbook of Statistics Time Series Analysis Methods and Applications, Vol. 30, 315-348.
4- Fokianos K., Rahbek A., & Tjostheim D. (2009), "Poisson Autoregression". Journal of the American Statistical Association. Vol. 104, pp. 1430–1439.
5- Weiß C.H. (2010), "INARCH(1) Processes: Higher-Order Moments and Jumps" Statistics and Probability Letters, Vol. 80, pp 1771-1780.
6- Zhou j. (2009), "Modeling S&P 500 Stock Index Using ARMA-Asymmetric Power ARCH models" Master thesis in Statistics School of Economics and Social Science Högskolan Dalarna, Sweden.
7- Zhu F. (2011), " A Negative Binomial Integer-Valued GARCH model" Journal of Time Series Analysis, Vol. 32, pp 54–67.
8- Zhu F. (2012), " Modeling Overdispersed or Underdispersed Count Data with Generalized Poisson Integer-Valued GARCH Models" Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 389, pp 58–71.
9- Zhu F. & Wang D. (2011), "Estimation and Testing for a Poisson Autoregressive Model" Metrika, Vol. 73, pp 211–230.

....
....
....