

تقدير معلمة نموذج راش للبيانات المصنفة لنظرية السلوك الكلاسيكية بطريقة المحاكاة

أ. د. دجلة ابراهيم مهدي* م. وضاح صبري ابراهيم**

المستخلص:

يهدف هذا البحث الى دراسة محاكاة لتقدير معلمة نموذج راش للبيانات المصنفة وهي معلمة صعوبة البند المقام على اختبارات الذكاء وتتبع تأثير (المعلمة المقدره ، حجوم العينات) من خلال احتساب متوسط مربعات الأخطاء (MSE)، وكذلك متوسط الخطأ النسبي المطلق المنوي (MAPE) لمعلمة النموذج المقدره بطريقة دالة الامكان الاعظم المشروطة.

واهم الاستنتاجات كانت: أن قيم متوسط مقدرات صعوبة استجابة الافراد للبند وللتوزيعات ولكافة حجوم العينات تكون سالبة وموجبة، وأن قيم MSE لمعلمة صعوبة البند تكون لتوزيع المنتظم اقل من قيم MSE للتوزيع الطبيعي، وكذلك فإن قيم MSE للتوزيع الطبيعي تكون اقل من قيم MSE للتوزيع بيتا، ومهما كانت اشارة المعلمة المقدره سالبة أو موجبة. المصطلحات المستخدمة: نموذج راش، نظرية القياس الكلاسيكي، دالة الامكان الاعظم المشروطة، المحاكاة.

Abstract :

This research aims to study the simulation to estimate parameter of the Rasch model categorical data as the difficulty parameter of item on intelligence tests and track the impact of (the estimated parameter, volumes samples) by the mean Square errors (MSE), and The mean absolute percentage error (MAPE) parameter model estimated by the conditional of Maximum likelihood estimation method.

The main conclusions of the research are: that the average potential of the values of the difficulty parameter of individuals in response to the items and the dividend and for all sizes of the samples are negative and positive, and the MSE values of the difficulty parameter of the items are for regular distribution of less than MSE values of normal distribution, and the MSE values of normal distribution be less of MSE for the distribution of beta values, Whatever the estimated parameter is negative or positive signal.

Keywords: Rasch Model, the conditional of Maximum likelihood estimation method, simulation, Classical Theory.

* جامعة بغداد / كلية الادارة والاقتصاد .

** الجامعة المستنصرية / كلية الادارة والاقتصاد .

مقبول للنشر بتاريخ 2015/8/11

مستل من اطروحة دكتوراه

1- المقدمة [1,3]: Interdiction

نتيجة لتطور القياس النفسي والذي انعكس بدوره على تطور الاختبارات والمقاييس كان الهدف الذي يسعى إليه علماء القياس النفسي هو تحقيق موضوعية القياس ؛ لذا شهد هذا الميدان تطورات متزايدة تتعلق بأساليب تصميم وبناء وتحليل فقرات الاختبار لتحقيق هذا الهدف.

يسعى علماء القياس والمعنيون بالعلوم التربوية والنفسية والصحية للتوصل الى الموضوعية في قياس سلوك الأفراد وأستجاباتهم، فقد بات بناء الأداة التي تمكن الباحث من الوصول الى التقدير الموضوعي لسلوك الفرد (أستجابة الفرد)، وكذلك صعوبة البند من الأمور الضرورية لدراسة السلوك.

يطلق على هذا النموذج في البحوث والدراسات النفسية والسلوكية وفي كثير من الأحيان أسم نموذج راش اللوغاريتمي احادي المعالم (Rasch One-Parameter Logistic Model)، أو نموذج راش اللوغاريتمي الاحتمالي البسيط (Rasch Simple Logistic Model)، وأحيانا نموذج المعلم الحر في تحليل الفقرات (Sample Free Item Analysis Model).

في الحقيقة أن الذكاء لا يقتصر على تعريف واحد فقد اتجه بعض علماء علم النفس إلى تعريف عام وخاص: التعريف العام" يشمل الذكاء كل نوع من أنواع المعرفة مهما كان أصلها من إحساس أو إدراك أو تداعي أو ذاكرة أو تخيل أو فهم"، التعريف الخاص ينظر إلى الذكاء من زاويتين: " الذكاء العلمي أو المباشر : وهو القدرة على التلاؤم لحل المشاكل الجديدة والظروف الطارئة"، الذكاء النظري : "وهو القدرة على التكيف والفهم وإدراك العلاقات المختلفة من تشابه أو اختلاف".

2- هدف البحث:

يهدف الاساس النظري لهذه الدراسة الى توضيح متطلبات القياس الموضوعي للسلوك كما تتمثل في أنموذج القياس ويتضمن هذا الاساس الصيغه الرياضيه لأنموذج وما تعنيه الموضوعيه الخاصه به، ويتضمن تقدير لمعالم أنموذج راش بطريقة دالة الامكان الاعظم المشروطة بطريقة المحاكاة.

3- تعريف ومصطلحات عامه [1,2]:

1-3- نظرية القياس الكلاسيكي (التقليدي) [5]: يقصد به مجموعة الطرق الاحصائية الكلاسيكية التي استخدمت في حساب مفاهيم الصعوبة، التمييز، الثبات، الصدق الخاصه ببناء الاختبارات التحصيلية للقياس تحت مايسمى بالنظريه الكلاسيكيه في القياس.

2-3- أنموذج راش: [4,5] Rasch Model

أن أنموذج راش هو من اهم نماذج الاستجابة للفقره حيث يحقق القياس الموضوعي عندما تستوفي فروض الأنموذج وهي احاديه البعد، استقلالية القياس (خطية القياس) توازي المنحنيات المميزه للفقرات ويقوم الأنموذج على نتائج تفا عل قدرة الفرد مع صعوبة الفقرات وتتمثل نتائج هذا التفاعل في شكل استجابات ملاحظه يمكن التوصل من خلالها الى تدرجات الفقرات وتقديرات الأفراد التي تتحقق بها مطالب الموضوعيه في القياس.

4- فروض أنموذج راش:

لكي تتوافر المتطلبات الموضوعية لأنموذج راش يجب ان يستوفي الفروض الآتية:

4-1- أحادية البعد:

يمكن أن يقال لمجموعة من البنود انها ذات صعوبة أحادية البعد أو يسمى سمة أحادية البعد، أي أن بنود الاختبار لا يمكن ان تكون مختلفة فيما بينها إلا من حيث مستوى صعوبة كل بند عن الآخر، كما يمكن لمجموعة من الأفراد ذو مستوى واحد من القدرة أن تحدد وحدها من مستوى أدائهم على الأختبار.

4-2- استقلالية القياس:

أن المعنى استقلالية القياس يأتي من عدم اعتماد تقدير معالم أنموذج راش على كل منهما للأخر، أي لا تعتمد تقدير معلمة صعوبة بند ما على البنود الأخرى المكونة للأختبار، ولا على تقديرات معلمة قدرة الاستجابة للأفراد، وكذلك فإن تقدير معلمة قدرة الفرد لا تعتمد على تقديرات معلمات الافراد الأخرين الذين يؤدون الاختبار، أو على تقديرات معالم صعوبة البنود المعدة للأختبار.

5- الصيغة الرياضية لأنموذج راش [3,6]:

احتمال حدوث الاستجابة الصحيحة هي دالة للفرق بين معلمتي صعوبة البند وقدرة الفرد $(B_i - \theta_j)$ ، ويمكن تمثيلها بالصيغة التالية:

$$P_j(B_i) = f(B_i - \theta_j) \quad \dots (1)$$

حيث ان $P_j(B_i)$ احتمال نجاح الفرد ذي القدرة (B_i) على البند (j).
الان يمكن أن تكتب المعادلة (1) بالشكل التالي:

$$P_j(B_i) = P(X_{ij} = 1) = \frac{\exp(B_i - \phi_j)}{1 + \exp(B_i - \phi_j)} \quad \dots (2)$$

وبما أن المعادلة (2) تمثل احتمال النجاح في الاستجابة، فإن احتمال الخطأ في الاستجابة $Q_j(B_i)$ يمكن تمثيلها بالمعادلة الآتية:

$$Q_j(B_i) = 1 - \frac{\exp(B_i - \phi_j)}{1 + \exp(B_i - \phi_j)} = \frac{1}{1 + \exp(B_i - \phi_j)} \quad \dots (3)$$

ومن المعادلتين (2) و (3) نحصل على المعادلة العامة لنموذج راش بالصيغة الآتية:

$$P_j(B_i) = \frac{\exp[x(B_i - \phi_j)]}{1 + \exp(B_i - \phi_j)} \quad x = 0, 1 \quad \dots (4)$$

المعادلة (4) تعد الصيغة العامة لأنموذج راش والتي توفر نموذجاً فعالاً للاستجابة، حيث نجتمع بين خطية التدرج وعمومية القياس، ولهذا يكون تقدير قدرة الفرد (B_i) متحرراً من تأثير صعوبة البند (ϕ_j) ، كما يكون تقدير صعوبة البند (ϕ_j) متحرراً من تأثير قدرة الفرد (B_i) .

6- طريقة تقدير دالة الأماكن الأعظم المشروطة^[5]:

The Conditional of maximum likelihood estimation method

في الصيغة العامة للمعادلة (4) يمكن صياغتها على الشكل الآتي :

$$P(X_{ij}/B_i, \theta_j) = \frac{\exp[X_{ij}(B_i - \theta_j)]}{1 + \exp(B_i - \theta_j)} \quad \dots (5)$$

$$\begin{aligned} X_{ij} &= 0, 1 \\ i &= 1, 2, \dots, n \\ j &= 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

حيث أن:

أن النموذج اعلاه يميز التفاعل بين الأفراد (i) والبندود (j)، وهناك شروط تفرض على النموذج، وهي

$$\sum_j^m X_{ij} \neq m \neq 0 \quad \dots (6)$$

$$\sum_i^n X_{ij} \neq n \neq 0 \quad \dots (7)$$

أن مجموع صفوف من درجات الاستجابة الأفراد (i) لمجموعة من البندود (j) يكون:

$$r_i = \sum_j^m X_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad \dots (8)$$

حيث أن (r_i) هي الدرجة التي يحصل عليها الافراد (i) ويقيمون عليها للاستجاباتهم لمجموعة من البندود، وأن مجموع الأعمدة من درجات الاستجابة لمجموعة من الافراد على مجموعة من البندود (j) يكون:

$$C_j = \sum_i^n X_{ij} \quad j = 1, \dots, m \quad \dots (9)$$

عند أخذ المجموعة الجزئية لدالة الأماكن لأستجابة لـ (m) من البندود يكون:

$$P\{(X_{ij})/B_i, (\theta_j)\} = \frac{\exp(B_i \sum_j^m X_{ij}) \cdot \exp(-\sum_j^m X_{ij} \theta_j)}{\prod_j^m [1 + \exp(B_i - \theta_j)]} \quad \dots (10)$$

من خلال استخدام المعادلة (8)، سوف تكتب المعادلة (10) بالصيغة الآتية:

$$P\{(X_{ij})/B_i, (\theta_j)\} = \frac{\exp(B_i r_i) \cdot \exp(-\sum_j^m X_{ij} \theta_j)}{\prod_j^m [1 + \exp(B_i - \theta_j)]} \quad \dots (11)$$

حيث أن الاحتمال اعلاه يتكون من ثلاثة اجزاء هي:

$\exp(B_i r_i)$: يمثل الربط بين درجة الفرد ومعلمة قدرته للاستجابة.
 $\exp(-\sum_j^m X_{ij} \theta_j)$: يمثل الربط بين البيانات ومعلمة صعوبة البند.

يمثل الجزء المقسوم عليه لا يحتوي على أي بيانات.

أن مجموع الاستجابات لكل صف تمثل قيمة وهي الدرجة التي يحصل عليها الفرد للتقييم من ناحية نجاحه في الاختبار أو فشله لاستجابته الصحيحة لمجموعة من البنود، ومن المعروف أن قدرة الفرد يمكن أن تتكافئ (تقيم) من خلال الدرجة التي حصل عليها من الاستجابات الصحيحة، والتي يمكن تعريفها بالدرجة الخام، وحسب الشروط التي تم توضيحها سابقاً ووفق ما سوف يحصل عليه الفرد من درجة للتقييم، إذن لابد أن تكون قيم مجموع صفوف الاستجابة للأفراد حسب المتباينة الآتية :

$$1 \leq (r_i = \sum_j X_{ij}) \leq (m-1) \quad \dots (12)$$

هنا تظهر حالة يجب التأكيد عليها هي أن تقدير معلمة قدرة أستجابة الفرد يجب أن تتساوى لكل الأفراد الذين لديهم نفس قيمة الأستجابة (درجة التقييم) لمجموعة البنود. الآن يمكن إعادة صياغة المعادلة (8)، وحسب الشروط المبينة للأنموذج بالصيغة الآتية:

$$r_i^* = \sum_{r^*=1}^{m-1} X_{ij} = n_{r^*} \quad \dots (13)$$

حيث أن:

(m) تمثل اكبر درجة ممكنة للحصول عليها للأستجابات الصحيحة لكل صف.
(r*) تمثل الدرجة التي يحصل عليها الفرد، وحسب الشرط لا يمكن ان تكون الدرجة التي يحصل عليها الفرد كاملة (m) أو (0).

(n_{r*}) تمثل عدد الأفراد الذين اعطوا نفس الأجابات الصحيحة لمجموعة من البنود في (r*).
وبما أن الشرط (12) يجب أن يتوفر في عدد لأستجابات الصحيحة لكل صف (r_i)، ومن المعادلة (11) يتم ايجاد مجموع الاحتمالات لكل الطرق الممكنة للحصول على الدرجة (r*) وتكون:

$$P \left\{ \sum_j X_{ij} = r^* / B_i, (\theta_j) \right\} = \frac{\exp(B_i r_i^*) \cdot \gamma_{r_i^*}}{\prod_j [1 + \exp(B_i - \theta_j)]} \quad \dots (14)$$

حيث أن: $\gamma_{r_i^*} = \sum_{r^*=1}^{m-1} [\exp(-\sum_j X_{ij} \theta_j)] = k \quad \dots (15)$

وأن المجموع أعلاه يتمثل لكل صفوف الأستجابة الممكنة ويكون مجموع لـ (r*)، وسوف يستخدم الرمز (K) للأختصار في الحل للمعادلات القادمة.

أن الاحتمال الشرطي لمتجه الاستجابة (X_{ij}) على درجة الفرد، نحصل عليه من خلال تقسيم المعادلة (11) على (14):

$$P\{(X_{ij})/r_i^*, (\theta_j)\} = \frac{\exp(-\sum_j X_{ij} \theta_j)}{\gamma_{r_i^*}} \quad \dots (16)$$

أن المعادلة (16) تعبر عن معالم صعوبة البنود، وهي حرة عن معالم قدرة الافراد، والنتيجة تعتمد على درجة الفرد، وهي مكافئة لقدرته، وأن دالة الأماكن المشروط لمصفوفة من البيانات ((X_{ij})) تتكون (m) من البنود لـ (n) من الافراد ، تكون بالشكل الآتي :

$$L = P\{((X_{ij}))/r_i^*, (\theta_j)\} = \prod_i \left[\frac{\exp(-\sum_j X_{ij} \theta_j)}{\gamma_{r_i^*}} \right] \quad \dots (17)$$

وبالتالي نحصل على الدالة المشروطة بالشكل التالي:

$$L = \frac{\exp(-\sum_j C_j \theta_j)}{\prod_i \gamma_{r_i^*}} \quad \dots (17)$$

ويمكن كتابتها بالصيغة الآتية :

$$L = \frac{\exp(-\sum_j C_j \theta_j)}{\prod_i \sum_{r^*=1}^{m-1} [\exp(-\sum_j X_{ij} \theta_j)]} \quad \dots (18)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي الى طرفي المعادلة (18) نحصل على:

$$\ln L = -\sum_j C_j \theta_j - \sum_i \ln \sum_{r^*=1}^{m-1} [\exp(-\sum_j X_{ij} \theta_j)] \quad \dots (19)$$

الآن نأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة (19) على النحو الآتي :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} = -c_j + \sum_i \frac{(-\sum_j X_{ij}) \exp(-\sum_j X_{ij} \theta_j)}{\sum_{r^*=1}^{m-1} [\exp(-\sum_j X_{ij} \theta_j)]} \quad \dots (20)$$

وبالتالي فأن:

$$-c_j + \sum_i \frac{(-r_i) \exp(-\sum_j X_{ij} \theta_j)}{n_i^* [\exp(-\sum_j X_{ij} \theta_j)]} = 0 = f'(\theta_j) \quad \dots (21)$$

والآن نأخذ المشتقة الثانية للمعادلة (20)، وبأستخدام المعادلة (15) على النحو الآتي :

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_j^2} = \sum_i^n \left[\frac{K(-\sum_j^m X_{ij})(-\sum_j^m X_{ij}) \exp(-\sum_j^m X_{ij} \theta_j)}{K^2} - \frac{(-\sum_j^m X_{ij}) \exp(-\sum_j^m X_{ij} \theta_j) \sum_{r^*}^{m-1} (-\sum_j^m X_{ij}) \exp(-\sum_j^m X_{ij} \theta_j)}{K^2} \right] \dots (22)$$

$$\sum_i^n \left\{ \frac{r_i^2 \exp(-\sum_j^m X_{ij} d_j)}{K} - \frac{r_i N [\exp(-\sum_j^m X_{ij} d_j)]^2}{K^2} \right\} = 0 = f''(\theta_j) \dots (23)$$

من مبدأ التكرار لأيجاد التقدير لمعلمة صعوبة البند بطريقة نيوتن-رافسون (Newton-Raphson)، وبأستخدام المعادلات (12) و (23) نحصل على :

$$d_j^{t+1} = d_j^t - \frac{f'(d_j^t)}{f''(d_j^t)} \dots (24)$$

7- المحاكاة Simulation

1-7 توليد الاعداد العشوائية :

- 1- توليد الاعداد العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم المستمر على الفتره (0 و 1) عن طريق دالة الكثافة التجميعيه التي تصف الامودج .
- 2- تحويل العدد العشوائي المنتظم الى متغير عشوائي يصف الامودج تحت التجربه بواسطة استعمال اسلوب رياضي احصائي .

2-7 صياغة نموذج المحاكاة :

تعتمد صياغه نموذج المحاكاة على ثلاث مراحل مهمة للتقدير وهي على التوالي كالآتي :

- 1- مرحلة تعيين القيم الافتراضيه
تعد هذه المرحلة اساسا للمراحل الاخرى لانه يتم فيها تحدد القيم الافتراضيه (الحقيقيه) ، ومنها تحديد حجم العينة، وقد تم اختيار اربعة حجوم وهي (n=25, 50, 100, 150).
- 2- مرحلة توليد البيانات العشوائية

لتوليد بيانات عشوائية تتبع توزيع ثلاثة توازيع مفترضة وهي (Standard Normal, Uniform, Beta).

3- مرحلة المقارنه

بعد ايجاد المقدرات يتم مقارنتها مع بعضها باستعمال معايير المقارنه وسيتم استعمال معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) لكونه مقياس عام يضم التباين والتحيز وصيغته الرياضيه كالآتي :

$$MSE = \left\{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [d - \hat{d}_j]^2 \right\} \dots (25)$$

وكذلك متوسط الخطأ النسبي المطلق المنوي (MAPE)، وصيغته الرياضيه كالآتي :

$$MAPE = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^k \left| \frac{d - \hat{d}_j}{d} \right| * 100 \dots (26)$$

4- تكرر التجربة (1000) مرة لكل توزيع ولكل حجم عينة.

جدول (1)

يبين صيغ توليد الأخطاء العشوائية للتوزيعات المتقطعة والمستمرة

Distribution	Formula
Uniform (α, β)	$a_t = \alpha + (\beta - \alpha)u$
Normal	$a_t = \sqrt{-2 \text{Log}(u_1)} \text{SIN}(2\pi u_2)$
Beta (α, β)	$a_t = y_1 / (y_1 + y_2)$ $y_1 = u_1^{\frac{1}{\alpha}}$, $y_2 = u_2^{\frac{1}{\beta}}$, $y_1 + y_2 < 1$

جدول (2)

يبين متوسط مقدرات معلمة صعوبة استجابة الأفراد لبند الاختبار المقام عن طريق المحاكاة

N	Normal (0,1)	Uniform (-1, 2)	Beta (1,2)
25	-0.02085	0.4954	-0.95907
50	0.011225	0.502665	-0.97948
100	0.005772	0.511711	-0.99545
150	0.001912	0.507677	-1.01017

جدول (3)

يبين معيار المقارنة بين المقدرات MSE

N	Normal (0,1)	Uniform (-1, 2)	Beta (1,2)
25	0.975919	0.687242	2.004179
50	0.949906	0.731147	1.958311
100	0.956883	0.728179	1.960687
150	0.973264	0.738178	1.976374

جدول (4)

يبين معيار المقارنة بين المقدرات MAPE

N	Normal (0,1)	Uniform (-1, 2)	Beta (1,2)
25	0.987649	0.923242	3.657439
50	0.9885606	0.931547	2.543681
100	0.997583	0.957289	1.987647
150	0.998654	0.967249	1.996538

8- الاستنتاجات Conclusion

- 1- أن قيم متوسط مقدرات صعوبة استجابة الأفراد للبنود وللتنوعات ولكافة حجومات العينات تكون سالبة وموجبة.
- 2- أن قيم المقدرات لمعلمة صعوبة البنود وللتنوع الطبيعي (Normal)، تكون سالبة وموجبة، أما للتوزيع المنتظم (Uniform)، تكون القيم جميعها موجبة، وأن توزيع بيتا (Beta)، تكون قيم متوسطات المقدرات للمعلمة جميعها سالبة.
- 3- أن قيم متوسط مقدرات صعوبة البنود المقدره للتوزيعات الثلاث ولحجوم العينات المختلفة ليس لها تأثير في تزايد أو تناقص قيم المقدره.
- 4- أن قيم MSE لمعلمة صعوبة البنود تكون للتوزيع المنتظم أقل من قيم MSE للتوزيع الطبيعي، وكذلك فإن قيم MSE للتوزيع الطبيعي تكون أقل من قيم MSE للتوزيع بيتا، ومهما كانت إشارة المعلمة المقدره سالبة أو موجبة.
- 5- أن قيم MAPE لمعلمة صعوبة البنود تكون للتوزيع المنتظم أقل من قيم MAPE للتوزيع الطبيعي، وكذلك فإن قيم MAPE للتوزيع الطبيعي تكون أقل من قيم MAPE للتوزيع بيتا، ومهما كانت إشارة المعلمة المقدره سالبة أو موجبة.

9- المصادر: References

- 1- اسماعيل، ميمي السيد احمد (2007)، "الخصائص السيكومترية لأختبار القدرة العقلية باستخدام نموذج راش لدى طلبة المرحلة الثانوية العامة"، كلية التربية، قسم علم النفس التربوي، جامعة الزقازيق.

- 2- السامرائي، محمد أنور محمود & الخفاجي، احمد محمد شاكر، (2012)، "بناء اختبار تحصيلي محكي المرجع في مادة علم نفس الخواص لطلبة اقسام العلوم التربوية والنفسية"، مجلة الاستاذ، العدد 203.
- 3- كاظم، أمينة محمد (1988)، "استخدام نموذج راش في بناء اختبار تحصيلي في علم النفس وتحقيق التفسير الموضوعي للنتائج"، مطبوعات جامعة الكويت.
- 4- Andersen, E. B. (1971) "The numerical solution of a set of conditional estimation equation", J. R. Statist. No.1 pp.42-54.
- 5- Wright, B. D. & Mead, R. J. (1976) "Rach model analysis with the Bical computer program", the university Chicago, Research note 24-82.
- 6- Wright, B. D. & Stone, M. (1999) "Measurement Essential", 2nd Edition, WIDE RANGE, Inc.

.....
.....
.....