

دراسة مقارنة لبعض طرائق تقدير النماذج الإلاخطية مع تطبيق عملي

مصطفى محمد كاظم**

أ.م. د أنكين اترانيك هايك*

المستخلص

يعد تقدير معاملات النماذج اللاخطية هي من أهم الامور التي يتطلب حسابها في الانحدار اللاخطي لمعرفة مدى استجابة النماذج لبيانات البحث، وقد تم استخدام عدة نماذج لاخطية لوصف حالة نمو معين منها أنموذج Negative Exponential وأنموذج Weibull . ان طريقة المربعات الصغرى اللاخطية Nonlinear Least Squares Method تعد من الطرق الشائعة في تقدير المعاملات من خلال صيغ معدة لها كطريقة كاوس نيوتن The Gauss –Newton Algorithm فضلاً عن بساطه وسهولة الطريقة في حل مشاكل عدة كذلك تم استخدام طريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق Maximum A Posteriori Method . وان هدف البحث هو المقارنة بين طريقتين للتقدير باستخدام بعض المؤشرات الإحصائية مثل متوسط مربعات الخطأ MSE ومعامل التحديد R^2 . وتبين من البحث ان طريقة المربعات الصغرى اللاخطية Nonlinear Least Squares افضل من طريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق Maximum A Posteriori Method لأنها تمتلك أقل MSE .

Abstract

The estimation of Parameters of the nonlinear models can be considered to be one of the most important things that is required in its calculation to know the response of models to the study of the data so several nonlinear models have been used to describe the state of a certain growth Including: Negative Exponential Model and Weibull Model. The nonlinear least squares method can be considered to be the most common methods to estimate the coefficient through several formulas as in the Gauss –Newton algorithm method as well as the simplicity of this method in solving several problems. Moreover, it's used method of Maximum a Posteriori (MAP) Estimation has also been used .

The aim of the study is to compare the two methods of estimation using Mean squares Error (MSE) and coefficient Determination (R^2). The study has concluded that Nonlinear least squares method is better than method of Maximum a Posteriori (MAP) Estimation because it has less MSE.

المصطلحات الرئيسية للبحث: طريقة المربعات الصغرى، طريقة كاوس نيوتن، طريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق، أنموذج Negative Exponential، أنموذج Weibull.

* الجامعة المستنصرية / كلية الادارة والاقتصاد .
** باحث .

مستل من رسالة ماجستير

مقبول للنشر بتاريخ 2017/1/24

1. المقدمة:

يعد تحليل الانحدار اسلوباً احصائياً للتنبؤ بقيم متغير او أكثر من المتغيرات التابعة (Dependent Variables) باستخدام قيم مجموعة من المتغيرات المستقلة (Independent Variables) وكما انه يمكن استخدامه لتقييم اثر المتغيرات المستقلة على المتغير التابع.

هناك نوعان من تحليل الانحدار النوع الاول هو الانحدار الخطي أما النوع الثاني فهو الانحدار اللاخطي والذي يكون أكثر تعقيداً لصعوبة حل معادلاته في حساب المقدرات للمعلمات لكن التطور الذي حصل في مجال الحاسوب لعب دوراً اساساً في تذليل تلك الصعوبات.

في هذا البحث تم تطرق الى بعض نماذج النمو منها نموذج Negative Exponential وأنموذج Weibull وتم تقدير معلمات النماذج بطريقتين وهما طريقة المربعات الصغرى اللاخطية وطريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق مع مقارنة بينهما. ونظراً لأهمية النماذج اللاخطية فان البحث يهدف الى ابراز و اظهار المفاهيم الإحصائية لاستخدام هذه النماذج في تحليل البيانات الاقتصادية او الزراعية وغيرها.

2. المشكلة وهدف البحث: The problem and Purpose of The Research

تكمن مشكلة البحث في ان العديد من الظواهر الطبيعية عند دراسة سلوكها نجدها تسلك سلوكاً غير خطي ولتحليل تلك الظواهر نستخدم النماذج اللاخطية لوصف تلك الظواهر مما يتطلب تقدير معالم تلك النماذج بطرائق تتصف بمقدراتها بالكفاءة والجودة .

يهدف البحث الى المقارنة بين طريقتين في تقدير معلمات النماذج اللاخطية وهي طريقة المربعات الصغرى اللاخطية Nonlinear Least Squars Method وطريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق Maximum Aposteriori Method لتحقيق أفضل المقدرات باستخدام مؤشرات إحصائية وهي R^2 و MSE .

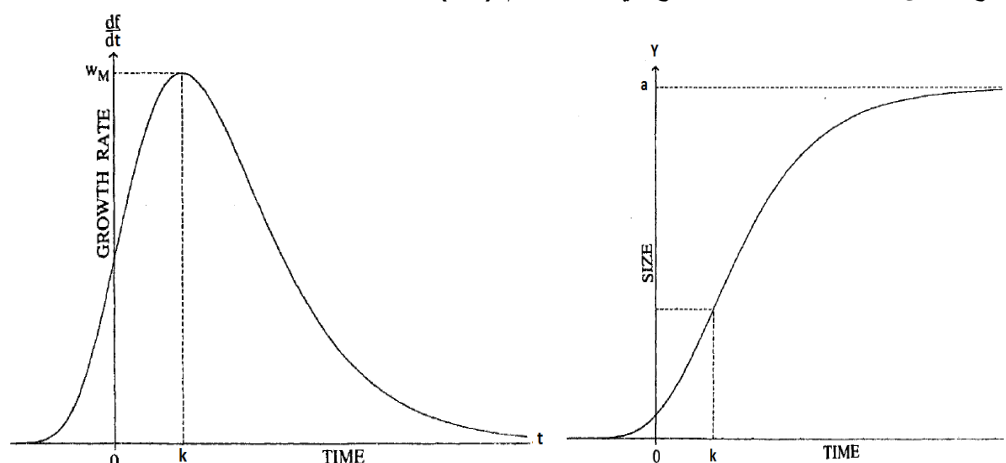
3. الجانب النظري:

يتضمن هذا المبحث دراسة بعض النماذج اللاخطية مع توضيح الصيغ المعتمدة في تحديد التقديرات لمعلمات تلك النماذج.

1.3 نماذج النمو Growth Models [10] [11]:

عند دراسة بيانات نمو من خلال رسم البيانات نلاحظ ان معدلات النمو لا تنخفض بشكل منتظم وانما تتزايد الى اقصى حد قبل ان تنخفض لتصل الى نقطة الصفر، ان اغلب منحنيات النمو تأخذ شكل حرف S كما موضح في الشكل (1a).

سيتم التطرق فيما بعد الى عدة نماذج نمو التي تحقق شكل النمو السيني فضلاً عن تحديد نقطة الانعطاف مع اقصى حالات النمو كما موضح في الشكل رقم (1b).



(1b)
منحنى معدل النمو

$$w_m = \text{Max, Growth rate}$$

(1a)
منحنى النمو

$$a = \text{Final Size of Y}$$

$$k = \text{Point of Inflection}$$

الشكل (1)
يوضح منحنى النمو

في هذا البحث تم التطرق الى النماذج الاتية:

1.1.3 أنموذج الاسي السالب Negative Exponential Model [9][6]:

يمكن التعبير عن أنموذج Negative Exponential بالصيغة الآتية:

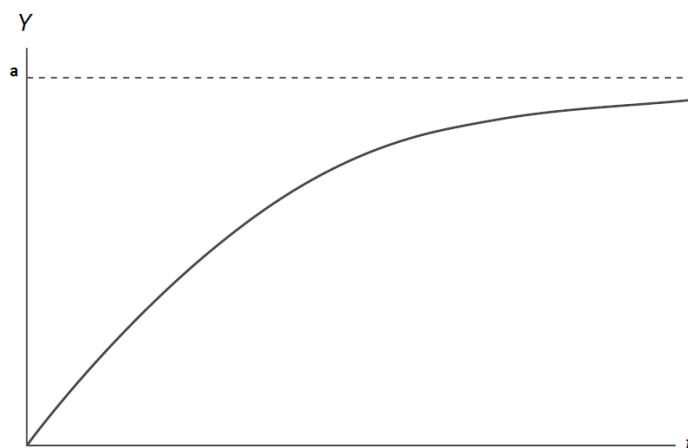
$$Y = a(1 - \exp(-k t)) \quad t \geq 0 \quad (1)$$

إذ ان $k > 0, a > 0$ تمثل معاملات الأنموذج وان قيمة Y تتغير مع تغير قيمة t ، فإذا كانت $t=0$ فإن $Y=0$ وعندما $t \rightarrow \infty$ يعني $Y = a$ ولتوضيح شكل الدالة يتم إيجاد المشتقة الأولى والثانية للصيغة رقم (1) وكما يأتي:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = k (a - Y) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = -k \frac{\partial Y}{\partial t} = -k^2 (a - Y) \quad (3)$$

نلاحظ ان المشتقة الثانية تكون أصغر من الصفر وكلما تقترب $t \rightarrow \infty$ فإن $Y \rightarrow a$ ويكون ميل الدالة موجب وفي تزايد كما موضح في الشكل (2).



الشكل (2)

يوضح منحنى أنموذج Negative Exponential

وبقسمة المعادلة (2) على Y نحصل على

$$\frac{\partial Y}{\partial t} \frac{1}{Y} = k \left(\frac{a}{Y} - 1 \right) \quad (4)$$

بهذا فإن معدل لقيمة جديدة عند زمن t يقترب من الصفر عندما $t \rightarrow \infty$. ولتقدير معاملات أنموذج Negative Exponential يتم اخذ اللوغاريتم الطبيعي للصيغة رقم (1) نحصل على المعادلة الآتية:

$$\ln \left(1 - \frac{Y}{a} \right) = -kt \quad (5)$$

بعد تحديد التقدير الأولي للمعلمة a ويرمز لها a_0 يمكن كتابة المعادلة اعلاه كما يلي:

$$z_i = \ln \left(1 - \frac{Y}{a_0} \right) = -kt + \epsilon \quad (6)$$

من حل المعادلة اعلاه نحصل على القيمة الأولية للمعلمة k ويرمز لها k_0

$$k_0 = \frac{-\sum_{i=1}^n z_i t_i}{\sum_{i=1}^n t_i^2} \quad (7)$$

باستخدام قيم التقديرات الأولية للمعلمتين (k_0, a_0) في أولى خطوات كأس نيوتن لتحقيق أفضل المقدرات وجعل مجموع مربعات الأخطاء $\sum_{i=1}^n e_i^2$ أقل ما يمكن أي ان .

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n [Y - a_0 \{1 - \exp(-k_0 t)\}]^2 \quad (8)$$

وان المشتقات الجزئية للمعلمات كانت:

$$\frac{\partial Y}{\partial a_0} = 1 - \exp(-k_0 t) \quad (9)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial k_0} = a_0 t \exp(-k_0 t) \quad (10)$$

2.1.3 أنموذج Weibull [9][10]:

يمكن التعبير عن أنموذج Weibull بالصيغة الآتية:

$$Y = a - b \exp(-kt^\delta), \quad t \geq 0 \quad (11)$$

إذ أن a, b, k, δ تمثل معلمات الأنموذج وتأخذ قيم موجبة وان قيمة Y تتغير مع تغير قيمة t فإذا كانت $t = 0$ يعني $Y = a - b$.

وعندما $t \rightarrow \infty$ يعني $Y \rightarrow a$ ولتوضيح شكل الدالة يتم إيجاد المشتقة الأولى والمشتقة الثانية للصيغة رقم (11) وكما يلي:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = k\delta t^{\delta-1}(a - Y) \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = k\delta t^{\delta-1} \left[(\delta - 1)t^{-1}(a - Y) - \frac{\partial Y}{\partial t} \right] \quad (13)$$

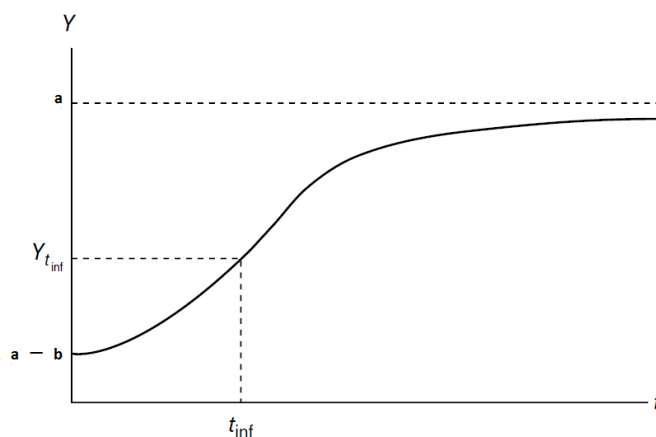
من المشتقة الثانية عندما $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0$ فإن $t = t_{inf} = \left[\frac{(\delta-1)}{k\delta} \right]^{\frac{1}{\delta}}$ وبتعويض قيمة t في معادلة رقم

(11) نحصل على

$$Y_t = Y_{inf} = a - b \exp [-(\delta - 1)/\delta]$$

بهذا تكون نقطة الانعطاف لدالة Weibull هي (t_{inf}, Y_{inf}) والشكل (3) يوضح منحنى أنموذج

Weibull.



الشكل (3)

يوضح منحنى أنموذج Weibull

نلاحظ من الشكل ان المنحنى يأخذ شكل حرف S وبقسمة المعادلة (8) على Y نحصل على

$$\frac{\partial Y}{\partial t} \frac{1}{Y} = k\delta t^{\delta-1} \left(\frac{a}{Y} - 1 \right) \quad (14)$$

فان معدل نمو لقيمة جديدة عند الزمن t يقترب الى الصفر كلما تقترب $t \rightarrow \infty$ ومن المعادلة

(14) نحصل على

$$\ln \left[\frac{\partial Y / \partial t}{Y} \right] - \ln \left(\frac{a}{Y} - 1 \right) = \ln(k\delta) + (\delta - 1) \ln(t) \quad (15)$$

بهذا يكون لدينا علاقة خطية بين لوغاريتم معدل نمو جديد والسابق له أي ما بين $(\ln(\frac{a}{Y} - 1) \text{ and } t)$.

ولتقدير معلمات نموذج Weibull يتم اخذ اللوغاريتم الطبيعي مرتين للصيغة رقم (11) نحصل على المعادلة الآتية:

$$\ln\left(-\ln\frac{a-Y}{b}\right) = \ln k + \delta \ln t \quad (16)$$

يمكن تحديد التقدير الاولي للمعلمة a ويرمز لها a_0 عند قيمة t الصغرى ويتم تحديد قيمة المعلمة b_0 من الصيغة الآتية:

$$b_0 = a_0 - Y_{int} \quad (17)$$

حيث Y_{int} تمثل قيمة الاحداثي للحد الثابت عندما $t=0$ ويمكن التعبير عن المعادلة (16) كالآتي:

$$z_i = \ln\left(-\ln\frac{a_0 - Y}{b_0}\right) = \ln k + \delta \ln t \quad (18)$$

باستخدام طريقة المربعات الصغرى (L.S.) للصيغة (18) يمكن تحديد التقديرات الاولية للمعلمتين k , يرمز لها δ_0, k_0 وكما يلي:

$$\delta_0 = \frac{n \sum_{i=1}^n z_i \ln t_i - \sum_{i=1}^n \ln t_i \sum_{i=1}^n z_i}{n \sum_{i=1}^n \ln t_i^2 - (\sum_{i=1}^n \ln t_i)^2} \quad (19)$$

$$k_0 = \exp\left(\bar{z} - \delta_0 \frac{\sum \ln(t)}{n}\right) \quad (20)$$

وباستخدام قيم التقديرات الاولية للمعلمتين $(\delta_0, k_0, b_0, a_0)$ في أولى خطوات كأس نيوتن لتحقيق افضل المقدرات وجعل مجموع مربعات الاخطاء $\sum_{i=1}^n e_i^2$ اقل ما يمكن أي ان

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n [Y - \{a_0 - b_0 \exp(-k_0 t^{\delta_0})\}]^2 \quad (21)$$

وكانت المشتقات الجزئية لمعلمات نموذج Weibull كما يلي:

$$\frac{\partial Y}{\partial a_0} = 1 \quad (22)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial b_0} = -\exp(-k_0 t^{\delta_0}) \quad (23)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial k_0} = b_0 t^{\delta_0} \exp(-k_0 t^{\delta_0}) \quad (24)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \delta_0} = b_0 k_0 \ln(t) t^{\delta_0} \exp(-k_0 t^{\delta_0}) \quad (25)$$

2.3 طرق تقدير معلمات نماذج الانحدار اللاخطية :

Methods to Estimate the Parameter of Nonlinear Models

ان نماذج الانحدار اللاخطية هي نماذج معقدة ومتداخلة وعملية تقدير معالمها صعبة وهناك عدة طرق للتقدير وسنتطرق فيما يأتي الى طريقتين وهما:

1.2.3 طريقة المربعات الصغرى اللاخطية [3] [5] [8] : Nonlinear Least Square Method

تعد طريقة المربعات الصغرى اللاخطية من اهم الطرق وابسطها في تحليل الانحدار اللاخطي.

نفترض لدينا النموذج غير الخطي الآتي

$$Y_i = f(\underline{t}, \underline{\theta}) + \epsilon \quad (26)$$

إذ ان

$$\underline{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)'$$

$$\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$$

Y_i : يمثل متجه قيم الاستجابة

θ, t_i : يمثل دالة من

ϵ_i : يمثل الخطأ العشوائي الذي يتوزع طبيعياً بمتوسط صفر وتباين ثابت σ^2 لجميع قيم i .

باستخدام طريقة المربعات الصغرى اللاخطية يمكن تصغير المقدار الآتي

$$S(\hat{\theta}) = [y - f(\underline{t}_i, \hat{\theta})]' [y - f(\underline{t}_i, \hat{\theta})] \quad (27)$$

باستخدام اسلوب كأوس نيوتن Gauss–Newton فإن $\theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}, \dots, \theta_{p0})'$ تمثل القيم الأولية للمعاملات وبعد تقريب هذه السلسلة باستخدام مفكوك سلسلة تايلر بحذف الحدود التي تحتوي على المشتقات الجزئية من الدرجة الاعلى نحصل على

$$f(\underline{t}_i, \underline{\theta}) = f(\underline{t}_i, \underline{\theta}_0) + \sum_{j=1}^p \left[\frac{\partial f(\underline{t}_i, \underline{\theta})}{\partial \theta_j} \right]_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_0} (\theta_j - \theta_{j0}) \quad (28)$$

حيث $\underline{\theta}^{(0)}$ تمثل القيم الأولية $(\underline{\theta})$ اذ كانت

$$\underline{Y}^* = \underline{D}^{(0)} \underline{B}^{(0)} + \underline{\epsilon} \quad (29)$$

اذا ان

$$\underline{Y}^* = \underline{Y} - \underline{f}^{(0)} = \begin{bmatrix} Y_1 - f_1^0 \\ Y_2 - f_2^0 \\ \vdots \\ Y_u - f_u^0 \\ \vdots \\ Y_p - f_p^0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}^{(0)} = \begin{bmatrix} D_{11}^0 & D_{12}^0 & \dots & D_{1p}^0 \\ D_{21}^0 & D_{22}^0 & \dots & D_{2p}^0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ D_{n1}^0 & D_{n2}^0 & \dots & D_{np}^0 \end{bmatrix}$$

$$D_{ij}^{(0)} = \left[\frac{\partial f(\underline{t}_i, \underline{\theta})}{\partial \theta_j} \right]_{\underline{\theta}=\underline{\theta}^{(0)}}$$

$$\underline{f}^0 = f(\underline{t}, \underline{\theta}^{(0)})$$

ويمكن تقدير معاملات $\underline{B}^{(0)}$ للمعادلة (29) باستخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية من خلال الصيغة الاتية:

$$\hat{\underline{B}}^{(0)} = (\underline{D}^{(0)} \underline{D}^{(0)})^{-1} \underline{D}^{(0)} \underline{Y}^* \quad (30)$$

حيث ان

$$\underline{B}^{(0)} = \underline{\theta} - \underline{\theta}^{(0)} \quad (31)$$

وان قيم التقديرية لـ $\underline{B}^{(0)}$ تكون

$$\hat{\underline{B}}^{(0)} = \hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta}^{(0)} \quad (32)$$

ومن المعادلة (32) يمكن الحصول على قيمة $\hat{\underline{\theta}}^{(1)}$ التي تمثل القيم التقديرية المعدلة لـ $\underline{\theta}$ عند

التكرار الاول ويتم وضعها بدل القيمة التقديرية الأولية $\underline{\theta}^{(0)}$ ويتم تكرار العمليات نفسها على مجموعة ثانية من التقديرات المعدلة $\hat{\underline{\theta}}^{(2)}$ وهكذا .

ان تقديرات المعدلة بشكل عام يمكن اعادة كتابتها وكمتمجه بالشكل الاتي:

$$\hat{\underline{\theta}}^{(r+1)} = \hat{\underline{\theta}}^{(r)} + \underline{B}^{(r)} \quad (33)$$

تستمر عمليات التكرار حتى نصل الى التقارب بين التقديران المتعاقبان (r) و $(r+1)$ بحيث ان

$$|\hat{\underline{\theta}}^{(r+1)} - \hat{\underline{\theta}}^{(r)}| < \gamma$$

اذ ان γ تمثل قيمة صغيرة جداً. مع ملاحظة $S(\underline{\theta})$ لكل دورة من دورات التكرار والتوقف حسب الصيغة الاتية:

$$S(\hat{\theta}^{(r+1)}) \cong S(\hat{\theta}^r) \quad (34)$$

2.2.3 طريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق [4][7]: Maximum A Posteriori Method

تعد هذه الطريقة احدى طرق بيز التقديرية من حيث اهتمام بمقياس المنوال للتوزيع اللاحق أكثر من المتوسط، بالرغم من زيادة قيمة تباين في هذه الطريقة مقارنة بطريقة بيز الا انها تعد أسهل من حيث حلها لمقدرات معلمات متعددة في النماذج اللاخطية وذلك لعدم ظهور التوزيع اللاحق فضلاً عن سهولة حل التكاملات العددية لمعادلات من الدرجات العليا.

نفرض أنموذج النمو في الصيغة الآتية:

$$f(t_i) = Y_i - \epsilon_i \quad (35)$$

$f(t_i)$: تمثل قيم المشاهدات التي تتوزع توزيعاً طبيعياً مستقلاً

$$f(t_i) \sim IN(0, \sigma_\epsilon^2)$$

صيغة توزيع اللاحق تكون

$$p(\theta|Y) = L(\theta)g(\theta) \quad (36)$$

حيث θ تمثل متجه معلمات ذات بعد $m \times 1$

Y : يمثل متجه قيم الاستجابة ذات بعد $n \times 1$

$L(\theta)$: يمثل دالة الامكان الاعظم ويمكن توضيحها كالآتي

$$L(\theta_k) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_\epsilon \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\epsilon_i^2}{2\sigma_\epsilon^2}\right) \quad (37)$$

$g(\theta)$: يمثل دالة كثافة احتمالية للتوزيع السابق

نفترض ان $g(\theta)$ يتوزع توزيع المتعدد الطبيعي مع متوسط μ ومصفوفة التباين والتباين المشترك Σ

$$g(\theta) \sim NM(\underline{M}, \Sigma)$$

بأخذ اللوغاريتم للتوزيع اللاحق نحصل على

$$\ln p(\theta|Y) = \ln L(\theta) + \ln g(\theta)$$

إذ ان

$$g(\theta) = \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_k \sum_L \Sigma^{KL} (\theta_k - \theta_{k0})(\theta_{L1} - \theta_{L0})\right] \quad (38)$$

وان

$$G(\theta_k) = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial f(t_i)}{\partial \theta_k} - \Sigma^{KL} (\theta_{L1} - \theta_{L0}) \quad (39)$$

اذ ان H تمثل مصفوفة **the Hessian matrix**

$$H(\theta_k, \theta_L) = -\frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \sum_{i=1}^n \left[\sum_k \sum_L \frac{\partial f(t_i)}{\partial \theta_k} \frac{\partial f(t_i)}{\partial \theta_L} + \epsilon_i \frac{\partial^2 f(t_i)}{\partial \theta_k \partial \theta_L} \right] - \Sigma^{KL} \quad (40)$$

ومصفوفة معلومات التوزيع اللاحق **the posterior information matrix** هي

$$I(\theta_k, \theta_L) = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(t_i)}{\partial \theta_k} \frac{\partial f(t_i)}{\partial \theta_L} + \Sigma^{KL} \quad (41)$$

وباستخدام برمجة العمليات الحسابية تم الحصول على تقديرات للمعلمات من خلال الصيغة الآتية:

$$\theta_{r+1} = \theta_r - I^{-1} G_r \quad (42)$$

4. الجانب التطبيقي:

في هذا التطبيق تم دراسة بيانات نمو انتاج نبات النخيل وكان نوع النمر خضراوي وحجم العينة $n=11$ وكلنا نعلم ان العراق يعد من اشهر الدول المصدرة للتمور عبر سنين عديدة واشارت الإحصائيات ان اعداد النخيل كان يقارب 30 مليون نخلة فاكثراً وان معدلات الانتاج كانت تصل الى 932 الف طن، الا ان بسبب الظروف التي مرت بها البلاد ولفترة طويلة مثل الحروب وغيرها اثرت بشكل واضح على مناطق انتاج النخيل الاكثر كثافة مثل محافظة البصرة ونتيجة لذلك انخفض انتاج النخيل بعد عام 2003 مما ادى الى حدوث نقصاً حاداً وصل الى 50% مما ادى بالتالي الى تناقص اعداد النخيل من 16 مليون نخلة لتصل الى 8 مليون نخلة .

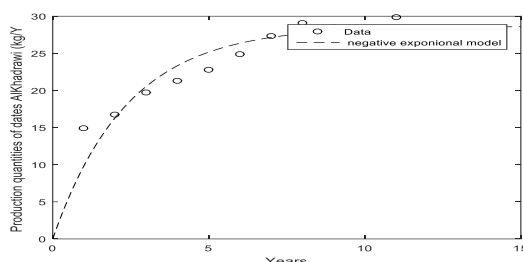
يعد نوع النمر الخضراوي من الانواع التجارية المرغوبة في العراق ويزرع بكثرة في محافظة البصرة ويأتي بعده نوع الحلواني من حيث الكثرة ويزرع في محافظتي ميسان وذبي قار ويزرع ايضاً في المناطق الوسطى. الجدول (1) يوضح بيانات نمو انتاج نبات النخيل نوع الخضراوي في العراق للسنوات (2005-2015) والتي اخذت من البيانات المنشورة والتابعة للجهاز المركزي للإحصاء.

جدول (1)

يوضح البيانات الاحصائية لنمو انتاج نبات النخيل الخضراوي حسب السنوات [1][2]

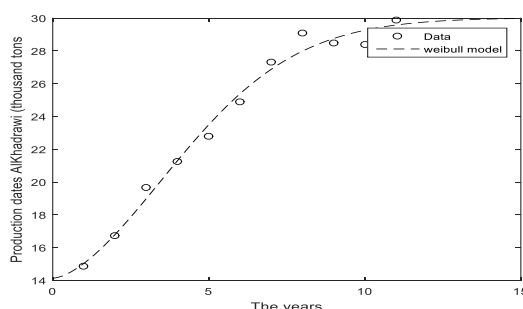
النمو (الف طن)	الزمن بالسنوات	النمو (الف طن)	الزمن بالسنوات
27.3	2011	14.87	2005
29.1	2012	16.74	2006
28.5	2013	19.69	2007
28.4	2014	21.26	2008
29.9	2015	22.8	2009
		24.9	2010

يمكن توضيح البيانات الواردة في الجدول اعلاه من خلال الرسم البياني في كل من الاشكل (4) و(5) ولكل أنموذج لملاحظة حالة النمو حسب السنوات.



الشكل (4)

يوضح منحنى أنموذج Negative exponential لإنتاج التمر الخضراوي



الشكل (5)

يوضح منحنى أنموذج Waybill لإنتاج التمر الخضراوي

1.4 تقدير معلمات النماذج اللاخطية:

أن تقدير المعلمات في النماذج اللاخطية يتطلب تحديد التقديرات الاولية للمعلمات ولكل أنموذج والتي يمكن توضيحها كما يأتي :

في حالة أنموذج Negative exponential تم تحديد التقدير الاولي للمعلمة a والتي يرمز لها بالرمز a_0 بحيث تقترب من اكبر قيمة Y ، ومن حل المعادلة (6) تم الحصول على التقدير الاولي للمعلمة Lnk والتي يرمز لها k_0 حسب الصيغة (7).

اما في حالة أنموذج Weibull فتم تحديد التقدير الاولي للمعلمة a والتي يرمز لها بالرمز a_0 بحيث تقترب من اكبر قيمة Y ، ومن المعادلة (17) يمكن الحصول على قيمة b_0 ومن حل المعادلة (18) نحصل على التقديرات الاولية للمعلمتين Lnk و δ والتي يرمز لها k_0 و δ_0 على التوالي حسب الصيغتين (20) و(19).

ويمكن توضيح المقدرات الاولية للمعلمات ولكل أنموذج كما في الجدول (2). وتم تقدير معلمات النماذج المختلفة من خلال تنفيذ برنامج بلغة R للحصول على مقدرات المعلمات بالطريقتين (O.L.S) و (M.A.P.) وكما موضح في الجدول (2).

جدول (2)

يوضح مقدرات المعلمات للنماذج اللاخطية بالطريقتين

Model	Method	a	b	k	δ
Neg.Exp.	O.L.S.	28.631		0.422	
	M.AP.	30.824		0.325	
Wei.	O.L.S.	30.029	15.773	0.051	1.773
	M.AP.	29.77	16.322	0.051	1.71

من خلال الجدول (3) نلاحظ ان القيم الحقيقية للمعاملات كانت مقاربة للقيم الاولى لها. و كذلك تم تحديد قيم متوسط مربعات الاخطاء MSE ومعامل التحديد R^2 ومعيار الانحراف الكلي TD اذ ان

$$TD = \left| \frac{\hat{a}-a}{a} \right| + \left| \frac{\hat{b}-b}{b} \right| + \left| \frac{\hat{k}-k}{k} \right| + \left| \frac{\hat{\delta}-\delta}{\delta} \right|$$

وكما موضح في الجدول (3).

جدول (3)

نتائج MSE, R^2, TD للطريقتين

Model	Method	MSE	R^2	TD
Neg.Exp.	O.L.S.	4.287	0.84	0.080
	M.AP.	5.417	0.80	0.232
Wei.	O.L.S.	0.363	0.99	0.10
	M.AP.	1.201	0.96	0.122

تبين من الجدول اعلاه ان نتائج المقدرات لطريقة O.L.S. كانت افضل من طريقة M.AP. من حيث معامل MSE.

1. الاستنتاجات:

1. تبين من تحليل البيانات ان انتاج نمو النخيل الذي نوعه خضراوي يستخدم فيه طريقة المربعات الصغرى اللاخطية O.L.S لتقدير المعلمات اللاخطية والاي كانت افضل من طريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق M.AP. ولكل النماذج باستخدام MSE و R^2 .
2. تبين من تحليل بيانات ان نموذج Negative Exponential وأنموذج Weibull كانت ملائمة للبيانات .

2. التوصيات:

1. استخدام طريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق M.AP. لتقدير معاملات نماذج الاحدار اللاخطي المتعدد.
2. استخدام اسلوب المحاكاة لتقدير المعلمات اللاخطية في نماذج النمو لاكثر من طريقة.

المصادر العربية:

- 1- المجاميع الاحصائية السنوية (2007,2008) الصادرة عن وزارة التخطيط، الجهاز المركزي للإحصاء، الاحصاء الزراعي.
- 2- تقارير السنوية صادرة (2009,2010,2011,2012,2013,2014,2015) الصادرة عن وزارة التخطيط، الجهاز المركزي للإحصاء، الاحصاء الزراعي.

المصادر الاجنبية:

- 1- Bates, D.M., Watts, D.G. (1988), " Nonlinear Regression Analysis and Its Applications", New York: John Wiley & Sons, Inc.
- 2- Bock R.D. and Du Toit S.H.C. (2003), " Parameter estimation in the context of nonlinear longitudinal growth models", In: Hauspie R.C., Cameron N., Molinari L. (eds): Methods in Human Growth Research. Cambridge Studies in Biological and Evolutionary Anthropology No. 39. Cambridge, Cambridge University Press: 198–220.
- 3- Draper, N. R. and H. Smith, (1998), "Applied Regression Analysis", 3rd Edn., John Wiley & Sons Inc. New York.
- 4- Goshu,Ayele Taye and Koya, Purnachandra Rao (2014), "Derivation of Inflection Points of Nonlinear Regression Curves - Implications to Statistics", American Journal of Theoretical and Applied Statistics, Vol.2, No.6, Pages 268-272.
- 5- Kak, Avinash (2014) "ML, MAP, and Bayesian — The Holy Trinity of Parameter Estimation and Data Prediction", The Trinity Tutorial.
- 6- Myers, Raymond H., Montgomery, Douglas C., Vining, G. Geoffrey and Robinson, Timothy J (2010), "Generalized Linear Models: With Applications in Engineering and the Sciences, Second Edition", A John Wiley & Sons, Inc., Publication.
- 7- Panik, Michael J. (2014), " Growth Curve Modeling: Theory and Applications", John Wiley & Sons, Inc.
- 8- Ratkowsky, D.A. (1983), "Nonlinear Regression Modeling", a Unified Practical Approach, Marcel Dekker, Inc, New York.
- 9- Seber, G. A. F. and Wild, C. J., (2003), Nonlinear Regression, New York: John Wiley & Sons.