# مقارنة بين تقديري دالة الامكان و بيز باستعمال التوزيع الاسي لدالة المعولية Cascade (الاجهاد- المتانة)

الباحث / محمد زهير خليل محمد . muhammad.zuheer@gmail.com
أ.م.د.رواء صالح محمد / rshnss69@yahoo.com الجامعة المستنصرية / كلية الادارية والاقتصاد

P: ISSN : 1813-6729
E : ISSN : 2707-1359
http://doi.org/10.31272/JAE.45.2022.132.18

تأريخ أستلام البحث : 2021/10/4
مقبول للنشر بتأريخ :2021/11/2

**المستخلص**

تم في هذا البحث اشتقاق المعادلات الرياضية لمعَّولية النظام التعاقبي الاحتياطي (Cascade 1+1) لمتغيرات ( الاجهاد - المتانة ) التي تتبع التوزيع الاسي و النظام التعاقبي الاحتياطي (Cascade 1+1) يتالف من مكونين احدهما نشط والأخر مستعد (احتياطي) يسمى بالنظام ( الاجهاد - المتانة ) التعاقبي الاحتياطي (Cascade 1+1). حيث ان فشل احد المكونيين يؤدي الى اشتغال المكون الاخر الاحتياطي. المتانة تمثل (v) و يتعرض النظام لجهد يمثل (u) بوجود عامل التوهين (K) والذي يصحح مسار النظام حيث يعمل على تحسين اداء النظام بتقليل الإجهاد المسلط على المكون اللاحق الذي سبب فشل المكون السابق. اضافة الى ذلك تم استعمال طريقتين لتقدير معَّولية النظام (Cascade 1+1) هما طريقة الامكان الاعظم ( MLE ) و طريقة بيز Bayes ومن ثم المقارنة بين الطريقتين بالاعتماد على متوسط مربعات الخطأ (MSE) ومن اهم الاستنتاجات من نتائج تجارب المحاكاة التي تم التوصل اليها ان افضل طريقة للتقدير هي طريقة بيز.

**الكلمات المفتاحية** : المعَّولية , Cascade 1+1 , الاجهاد – المتانة, MLE, Bayes .

مجلة الادارة والاقتصاد
العدد 132 / اذار/ 2022
الصفحات : 248 - 259

---

بحث مستل من رسالة ماجستير

## 1- المقدمة

تعرض الانسان منذ القدم لاجهادات وضغوط نفسية مستمرة ومتغيرة ، وقد لا يمتلك الانسان القوة الكافية للتغلب على الإجهادات أو الضغوط ، لذلك أصبح مصطلح (الإجهاد - المتانة) (Stress - Strength) مصطلحاً مهماً للدراسة والبحث من قبل الباحثين الذين حاولوا إعطاء تفسيراً لطبيعة العلاقة بين الضغط النفسي والقدرة على تحملهِ [1]. تعتبر المعَّولية (Reliability) من المعايير الاساسية في تقييم عمل مكونات انظمة هندسية وصناعية , اذ تمثل مقياس لأداء المكون بمرور الوقت ( تحدد الفترات الزمنية لأوقات فشل المكونات) , اما إحتمال أن يكون الإجهاد الواقع على المكون أقل من متانة المكون ضمن المواصفات التشغيلية فانه يمثل دالة المعَّولية لإنموذج (الإجهاد – المتانة) [2].

في العام (1975) درس الباحثان (Pandit and Sriwastav) التعامل مع دالة المعَّولية التعاقبية لانموذج (الإجهاد – المتانة) ، اذ اشتقا المعادلات الرياضية لدالة المعَّولية التعاقبية من نوع (n-cascade) في حالتين , الاولى هي متغيري (الاجهاد والمتانة) اللذين يتبعان التوزع الاسي، والحالة الثانية هي متغيرالاجهاد يتبع توزيع كاما ومتغير المتانة يتبع التوزيع الطبيعي، ومعامل توهين الاجهاد في كلا الحالتين هو قيمة ثابتة [3]. و ايضا في العام (2016) قام الباحثان (Mutkekar and Munoli) بتقدير دالة المعَّولية المتعاقبة cascade لنظام (1+1) يتكون هذا النظام من مكونين الاول في وضع التنشيط والثاني في وضع الاستعداد حيث ان متغيرا (الاجهاد – المتانة) يتبعان التوزيع الاسي وذلك بمقارنة طريقتي الامكان الاعظم (MLE) والمقدر المنتظم ذي اقل تباين (UMVUE) باستعمال متوسط مربعات الخطأ , وتوصلا الى افضل طريقة للمقدر المنتظم ذي اقل تباين باستخدام المحاكاة [4] .

## 2- هدف البحث

**ان الهدف من البحث** هو تقدير دالة معًولية نظام (Cascade 1+1) باستعمال طريقتي التقدير المعتمدتان MLE و Bayes في البحث وباعتماد تجارب المحاكاة بالاضافة الى اشتقاق المعادلة الرياضية لمعًولية نظام (Cascade 1+1) اذ ان متغيرات (الاجهاد و المتانة) تتبع التوزيع الاسي ومن ثم تقدير دالة معًولية بطريقتي التقدير MLE وبيز.

## 3- مشكلة البحث

في انظمة (الاجهاد - المتانة) العادية فان فشل احد المكونات للنظام سوف يؤدي الى فشل النظام باكمله وتوقف المنظومة بالكامل. لذلك تم الاستعانة بالنظام التعاقبي الاحتياطي (Cascade) لاستمرار المنظومة بالعمل بعد فشل احد مكونات النظام , تم اشتقاق دالة معًولية نظام (Cascade 1+1) (الاجهاد- المتانة) للتوزيع الاسي .
ان طبيعة عمل النظام التعاقبي Cascade يتكون من مكونين احدهما نشط والاخر احتياطي واذا فشل المكون الأول في العمل يتم تنشيط المكون الثاني ليواجه الضغط المسلط عليه وهكذا , وايضا تم تقدير دالة معًولية نظام (Cascade 1+1) باستخدام طرقتي بيز وMLE .

## 4- المعًولية: (Reliability)

**الغرض من المعًولية** هو تحليل المتغير العشوائي الذي يمثل الفترة الزمنية حتى حدوث الفشل ، أي انها مقياس للأداء بمرور الزمن ، حيث ان أي مكون قد يحتاج الى مواصفات خاصة لتأدية عمل هذا المكون المطلوب تحت ظروف اعتيادية وتشغيلية ، وبصورة عامة فان عمل المكون بصورة طبيعية يكون هذا المكون معولاً عليه ، حيث يطلق على المعًولية (Reliability) في بعض الاحيان الموثوقية , المعًولية مقياس لاداء النظام وظيفة معينة بمرور الزمن, وانها إحتمال عمل المكون بنجاح بعد الزمن $(z)$ وضمن فترة $[0, z]$ . ويمكن تمثيل المعادلة الرياضية العامة لدالة المعًولية $R(z)$ كالتالي [5] :

$$\mathbf{R(z) = Pr(Z > z) = \int_{z}^{\infty} \mathit{f}(u)\ du} \qquad (1)$$

## 5- (النظام للاجهاد - المتانة الاحتياطي) (Stress - Strength Cascade System)

**النظام التعاقبي (cascade)** هو حالة فريدة من الانموذج (الإجهاد – المتانة) ، وهو الذي يعتبر مقياس لنجاح واداء النظام واجبه بصورة صحيحة بالاعتماد على (الإجهاد – المتانة) وعامل التوهين , ويمكن اعتبار عامل التوهين قيمة ثابتة لكل مكونات النظام، أو يمكن اعتبار قيمته كمعلمة لها قيم ثابتة مختلفة لمكونات مختلفة، أو يمكن اعتباره متغير عشوائي.

نظام (cascade) التعاقبي لعدد مكونات (n) المتتالي له الية عمل تتمثل في تنشيط المكون الأول ليتعرض تأثير ضغط عشوائي مع بقاء (n-1) من المكونات في وضع الاحتياط لمواجهة ذلك الضغط [3] ، اذ ان فشل المكون الأول $A_1$ في العمل يتم تنشيط المكون الثاني $A_2$ ليواجه الضغط المسلط عليه وهكذا. يطلق على هذا النوع بالنظام التعاقبي (n-Cascade). اما اذا كان النظام التعاقبي (cascade) يتكون من مكونين الاول نشط و الثاني احتياطي فيسمى بالنظام (الاجهاد – المتانة) التعاقبي (Cascade 1+1). ان انواع الانظمة

التعاقبية تختلف بإختلاف نوع النظام المطبق وطبيعة سلوك متغيرات الاجهاد والمتانة، فعدد المكونات المتعاقبة التي يقع عليها الضغط (الإجهاد) وطبيعة العلاقة بين هذه المكونات المتعاقبة هي التي تحدد نوع النظام التعاقبي الملائم للاستعمال لوصف ذلك النظام، وكذلك بالنسبة لمتغيري المتانة والإجهاد فإنهما يوفّقان في سلوكهما ليتبعان إما التوزيع الإحتمالي نفسه او توزيعين إحتماليين مختلفين، كذلك يمكن أن يكونا مستقلين أو معتمدين وفقاً لطبيعة الانظمة [7] .

## 6- التوزيع الأسي The Exponential Distribution

يعتبر التوزيع الأسي من التوزيعات المستمرة الشائعة الإستعمال في اغلب دراسات دالة المعَولية ودالة البقاء، ويمكن تعريف دالة الكثافة الإحتمالية ( Probability Density Function) (p.d.f) للمتغير العشوائي (Z) الذي يتبع التوزيع الأسي بمعلمة القياس (ω) وحسب المعادلة التالية [2]:

$$\mathbf{f(z;\omega) = \omega\, e^{-\omega v}} \qquad \omega, z > 0 \qquad (2)$$

**اما الصيغة الرياضية لدالة الكثافة التجميعية (Probability Cumulative Function)(c.d.f) فهي:**

$$\mathbf{F(z;\omega) = Pr(Z \le z) = \int_0^z f(z)dz = 1 - e^{-\omega z}} \qquad (3)$$

**و دالة المخاطرة (Hazard Function) كما يلي:**

$$\mathbf{h(z;\omega) = Pr(Z < z) = \int_z^\infty f(z)dz = e^{-\omega z}} \qquad (4)$$

**اذ ان $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ تتمثل بالعينة العشوائية الغير معتمدة و بحجم $(n)$ مأخوذة من مشاهدات المتغير العشوائي $(Z)$ الذي يتبع التوزيع الأسي بمعلمة القياس $(\omega)$ ومن معادلة (2) ، حيث يمكن إيجاد دالة الإمكان ( Likelihood Function) $L(z|\omega)$ ، كالتالي:**

$$\mathbf{L(z_i|\omega) = \prod_{i=1}^{n} f(z_i|\omega) = \prod_{i=1}^{n} \omega\, e^{-\omega z_i} = \omega^n\; e^{-\omega \sum_{i=1}^{n} z_i}} \qquad (5)$$

**يتم الحصول على مقدر طريقة الإمكان الأعظم للمعلمة $(\omega)$ وذلك بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للمعادلة (5) ، وباخذ الإشتقاق الجزئي للمعلمة $(\omega)$ ، ومساواتها بالصفر:**

$$\hat{\omega}_{ML} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} z_i} \qquad (6)$$

## 7- دالة معولية نظام (Cascade 1+1)

بافتراض ان $\mathbf{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n}$ مجموعة متغيرات المتانة (strength) العشوائية المستقلة بدالة الكثافة **الاحتمالية** $\mathbf{f_i(v_i), i = 1, 2, \dots, n}$ المشار اليها في المعادلة (2)، وان متغير الاجهاد العشوائي $u_1$ بدالة الكثافة الاحتمالية التي تتبع التوزيع الاسي $\mathbf{g(u_1)}$ بمعلمة القياس $\boldsymbol{\beta}$، سيتم في هذا البحث التركيز على ايجاد دالة معَولية نظام (Cascade 1+1)، و بوجود مكون نشط وفي حالة فشله يتم استبداله بالمكون الاخر الاحتياطي، وقد تناول الباحثون هذا النوع من أنظمة ( Cascade) بعدة حالات نذكر منها[5]:

الحالة الأولى: عندما تكون متغيرات المتانة تتبع التوزيع الاسي بمعلمة القياس $\boldsymbol{\alpha}$، بدون عامل التوهين (**K**)الذي تكون قيمه ( 1 , 0.7 , 0.5 , 0.3 ) ، فدالة معَولية المكون الأول **عندما** $\mathbf{v_1 > u_1}$ **هي :**

$$\mathbf{R_1 = \int_0^\infty \bar{F}_1(u_1)\, g(u_1)du_1 = \int_0^\infty e^{-\alpha u_1}\; \beta\, e^{-\beta u_1}\, du_1} \qquad (7)$$

$$\mathbf{R_1 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}} \qquad (8)$$

**الدالة المتممة للمتانة : $\mathbf{\bar{F}_1(u_1)}$**

وان معَولية النظام التعاقبي للمكون الثاني في حال فشل المكون الأول يتم حسابها كما يلي:

$$\mathbf{R_2 = Pr(v_1 < u_1, v_2 > u_1) = \int_0^\infty F_1(u_1)\, \bar{F}_2(u_1)\, g(u_1)du_1} \qquad (9)$$

$$R_2=\int_0^{\infty}(1-e^{-\alpha u_1})\,e^{-\alpha u_1}\;\beta\,e^{-\beta u_1}\,du_1 \qquad (10)$$

$$R_2=\beta\left(\int_0^{\infty}e^{-(\alpha+\beta)u_1}du_1-\int_0^{\infty}e^{-(2\alpha+\beta)u_1}\,du_1\right) \qquad (11)$$

ثم إيجاد نتائج التكاملات في المعادلة (11) وتصبح معادلة المعولية للمكون الثاني للنظام[5]:

$$R_2=\frac{\beta}{\alpha+\beta}-\frac{\beta}{2\alpha+\beta}=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)} \qquad (12)$$

**ان $RC$ تمثل المعولية الكلية لنظام (Cascade 1+1) وبتعويض قيم $R_1$ و $R_2$ نحصل على التالي:**

$$RC_{(1+1)}=R_1+R_2$$

$$RC_{(1+1)}=\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)}\right) \qquad (13)$$

**الحالة الثانية: عندما تكون متغيرات المتانة تتبع التوزيع الاسي بمعلمة القياس $\alpha$ عندما $v_1<u_1$ فدالة معًولية المكون الأول ممكن حسابها كما يلي (11):**

$$R_1=\beta\int_0^{\infty}e^{-\alpha u_1}\;e^{-\beta u_1}\,du_1=-\frac{1}{\alpha+\beta}\int_0^{\infty}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha_1+\beta)u_1}\,du_1 \qquad (14)$$

$$R_1=\frac{\beta}{\alpha+\beta} \qquad (15)$$

**وان معًولية النظام التعاقبي للمكون الثاني في حال فشل المكون الأول ممكن حسابها كما يلي:**

$$R_2=\frac{\beta}{\alpha k_2^*+\beta}-\frac{\beta}{\alpha k_2^*+\alpha+\beta} \qquad (16)$$

$k_i^*$ : عامل التوهين التجميعي للمكون $i$

**وبما ان $RC$ تمثل المعولية الكلية لنظام (Cascade 1+1) وبتعويض قيم $R_1$ و $R_2$ نحصل على التالي:**

$$RC_{(1+1)}=R_1+R_2$$

$$RC_{(1+1)}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha k_2^*+\beta}-\frac{\beta}{\alpha(k_2^*+1)+\beta} \qquad (17)$$

**الحالة الثالثة : عندما تكون متغيرات المتانة تتبع التوزيع الاسي بمعلمات القياس $\alpha_i$ ،عندما $, i=1,2,\ldots,n$**

**سوف تصبح دالة معًولية المكون الأول:**

$$R_1=\beta\int_0^{\infty}e^{-\alpha_1 u_1}\;e^{-\beta u_1}\,du_1=-\frac{1}{\alpha_1+\beta}\int_0^{\infty}-\left(\frac{1}{\alpha_1+\beta}\right)e^{-(\alpha_1+\beta)u_1}\,du_1 \qquad (18)$$

$$R_1=\frac{\beta}{\alpha_1+\beta} \qquad (19)$$

**اما معًولية النظام التعاقبي للمكون الثاني في حال فشل المكون الأول فيمكن اشتقاقها من خلال المعادلة الاتية:**

$$R_2=\beta\left(\int_0^{\infty}e^{-(\alpha_2k_2^*+\beta)u_1}du_1-\int_0^{\infty}e^{-\{\alpha_2k_2^*+\alpha_1+\beta\}u_1}\,du_1\right) \qquad (20)$$

**لذا فان $R_2$ تكون:**

$$R_2=\frac{\beta}{\alpha_2k_2^*+\beta}-\frac{\beta}{\alpha_2k_2^*+\alpha_1+\beta} \qquad (21)$$

**وبجمع المعادلتين (19) و (21) نحصل على المعًولية الكلية لنظام (Cascade 1+1) [5]:**

$$RC_{(1+1)}=\frac{\beta}{\alpha_1+\beta}+\frac{\beta}{\alpha_2k_2^*+\beta}-\frac{\beta}{\alpha_2k_2^*+\alpha_1+\beta} \qquad (22)$$

## 8- طريقة تقدير الإمكان الأعظم لدالة معّولية النظام ( Method For Estimating The Maximum Potential Of the System Reliability Function) [8]

تمتاز طريقة الإمكان الأعظم بصفة الثبات (Invariance) اي يمكن إيجاد مقدرات دالة معّولية نظام (Cascade 1+1) عندما تتبع متغيرات المتانة والاجهاد التوزيع الاسي، وفي حال عدم تساوي معلمتي متغيري المتانة للمكون الأول والثاني، و بتعويض مقدر معلمة القياس للمعادلة (6) في معادلة (22) نحصل على مقدر طريقة الإمكان الأعظم لدالة معّولية نظام (Cascade 1+1) كما يلي :

$$\widehat{RC}_{ML} = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}+\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}k_2^* + \hat{\beta}} - \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}(k_2^*+1)+\hat{\beta}} \qquad (23)$$

**وبعد التبسيط نحصل على:**

$$\widehat{RC}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i=1}^{n} v_{1i}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} v_{2i}}{k_2^* \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i=1}^{n} v_{2i}} \qquad (24)$$

$$- \frac{\sum_{i=1}^{n} v_{2i}\ \sum_{i=1}^{n} v_{1i}}{k_2^* \sum_{i=1}^{n} v_{1i} \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i=1}^{n} v_{2i} \left(\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i=1}^{n} v_{1i}\right)} \qquad (25)$$

## 9 - (طريقة بيز القياسية لتقدير دالة معّولية النظام (Standard Bayesian Method for Estimating The Reliability Of a System):

تمثل طريقة Bayes الطريقة الاكثر استخداماً حيث تفرض المعلمات المطلوب تقديرها والتي تمثل متغيرات عشوائية يتم توفيرها حول معلومات أولية يتم تمثيلها على شكل دالة كثافة إحتمالية تسمى بالتوزيع الإحتمالي الأولي (Prior Distribution) ، ومن خلال دمج التوزيع الأولي بصيغة الإمكان ( Likelihood Function) باستعمال دالة بيز العكسية حيث تم الحصول على معّادلة كثافة إحتمالية تدعى بالتوزيع اللاحق (Posterior Distribution) كما في المعادلة [9]:

$$P(\omega|z) = \frac{L(z|\omega)\ \pi(\omega)}{\int_{\forall\omega} L(z|\omega)\ \pi(\omega) d\omega} \qquad (19)$$

### 9-1 مقدرات طريقة بيز لدالة معّولية نظام (Cascade 1+1) [10]:

**تعد** $v_1, v_2, \dots, v_n$ متغيرات المتانة (strength) العشوائية المستقلة لصيغ الكثافة الاحتمالية $f_i(v_i), i = 1, 2, \dots, n$ ، ومتغير الاجهاد العشوائي $u$ لصيغة الكثافة الاحتمالية تتبع التوزيع الاسي exponential distribution $g(u)$ ولمعلمة القياس $\beta$، وبصيغ الكثافة الإحتمالية الموجودة في الصيغة (2) ، وبمعادلات الإمكان $L(z|\alpha)$ الموجودة في المعادلة (5)، يتم ايجاد مقدرات طريقة بيز لمعادلة معّولية نظام (Cascade 1+1) وكما يلي [10]:

وفقاً لتوزيع (Jeffery Prior) جيفري الاولي:

تم اشتقاق مقدر طريقة بيز لمعّولية نظام (Cascade 1+1) $R_{BS1}$, وفقاً لتوزيع جيفري وصيغة خسارة مربع الخطا لمعادلة (20) ، حيث [10]:

$$R_{IBS} = \frac{\iint_{\forall\alpha\beta} R_1\ P_1(\alpha,\beta|v,u)\ \ d\alpha\, d\beta}{\iint_{\forall\alpha\beta} P_1(\alpha,\beta|v,u)\ \ d\alpha\, d\beta} \qquad (27)$$

تم حساب مقدر دالة المعّولية لنظام (Cascade) للمكون الأول $\hat{R}_{1BS1}$ كالتالي:

$$\hat{R}_{1BS1} = \frac{\iint_0^\infty \frac{\beta}{\alpha+\beta}\ \alpha^{(n-2)}\ \beta^{(n-2)}\ \ e^{-\alpha V_i}\ \ e^{-\beta U_i}\ \ d\alpha\, d\beta}{\iint_0^\infty \alpha^{(n-2)}\ \beta^{(n-2)}\ \ e^{-\alpha V_i}\ \ e^{-\beta U_i}\ \ d\alpha\, d\beta} \qquad (28)$$

وتم اشتقاق مقدر صيغة المعّولية لنظام (Cascade1+1) للمكون الثاني $\hat{R}_{2BS1}$ مع ملاحظة ان دالة التوزيع الاولي المشتركة لمتغيري المتانة ستصبح كالتالي:

$$\pi_2(\alpha,\beta) = c\ .\ \frac{\sqrt{n}}{\alpha^2\beta} \qquad (29)$$

حيث صيغة التوزيع اللاحق لمتغيري المتانة ستكون :

$$P_{12}(\alpha,\beta|v,u) \propto \alpha^{(n-3)}\ \beta^{(n-2)}\ \ e^{-2\alpha V_i}\ \ e^{-\beta U_i} \qquad (30)$$

حيث ان:

$$\widehat{R}_{2BS1}=\frac{\iint_{\forall\alpha\beta} R_2\ P_{12}(\alpha,\beta|v,u)\ \ d\alpha\, d\beta}{\iint_{\forall\alpha\beta} P_{12}(\alpha,\beta|v,u)\ \ d\alpha\, d\beta} \qquad (31)$$

$\widehat{R}_{BS1}$ يمثل مقدر دالة معّولية نظام (Cascade 1+1) وفقاً لتوزيع جيفري وصيغة خسارة مربع الخطا يكون:

$$\widehat{R}_{BS1}=\widehat{R}_{1BS1}+\widehat{R}_{2BS1} \qquad (32)$$

أما مقدر طريقة بيز لمعادلة معّولية نظام (Cascade 1+1) $RC_{BE1}$ وفقاً لتوزيع جيفري ومعادلة خسارة (entropy) الانتروبي ، فقد تم اشتقاقه وحسب المعادلات (30) و (31) [10]:

$$\widehat{R}_{1BE1}=\left[\left\{\iint_0^{\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{-1}\ \alpha^{n-2}\ \ \beta^{n-2}\ e^{-\alpha V_i}\ \ e^{-\beta U_i}\, d\alpha\, d\beta\right\}\Big/\left\{\iint_0^{\infty}\alpha^{n-2}\ \ \beta^{n-2}\ \ e^{-\alpha V_i}\ \ e^{-\beta V_i}\, d\alpha\, d\beta\right\}\right]^{-1} \qquad (33)$$

$$\widehat{R}_{2BE1}=\left[\left\{\iint_0^{\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha k_2^*+\beta}-\frac{\beta}{\alpha(k_2^*+1)+\beta}\right)^{-1}\alpha^{n-3}\ \ \beta^{n-2}\ e^{-\alpha V_i}\ \ e^{-\beta U_i}\, d\alpha\, d\beta\right\}\Big/\left\{\iint_0^{\infty}\alpha^{n-3}\ \ \beta^{n-2}\ \ e^{-\alpha V_i}\ \ e^{-\beta U_i}\, d\alpha\, d\beta\right\}\right]^{-1} \qquad (34)$$

$$\widehat{R}_{BE1}=\widehat{R}_{1BE1}+\widehat{R}_{2BE1} \qquad (35)$$

## 10- معاينة جبس Gibbs Sampling :

ان اصل معاينة جبس يكمن في عمليات جبس المأخوذة من التطبيقات الفيزيائية وبالتحديد من خوارزمية (Metropolis–Hastings algorithm) التي تبنى عليها عمليات لاحقة بالاعتماد على العمليات السابقة ، والتي تكوين سلسلة ماركوف حيث تتقارب للوصول الى حالة الإستقرارية.

ان الية عمل معاينة جبس تعتمد على معرفة التوزيعات الشرطية احادية المتغير، حيث يعتبر التعامل مع التوزيعات الشرطية ابسط في التعامل مع التوزيعات المشتركة المركبة عند استعمال اسلوب المحاكاة، فغالبا ما تكون للتوزيعات الشرطية صيغ بسيطة تتبع توزيعات أولية معروفة ، وبهذا يمكن محاكاة عدد معين من المتغيرات العشوائية بشكل تتابعي من التوزيعات الشرطية احادية المتغير.

في اغلب الحالات التي يصعب فيها حساب التكاملات الناتجة عن تقديرات طريقة بيز يتم اللجوء الى طرائق سلسلة ماركوف **(MCMC)** لحسابها وفي حالة دالة خسارة الانتروبي فان مقدر بيز النهائي سيكون وفق الصيغة الاتية [12]:

$$E\left[P\{(\alpha,\beta)^{-1}|V,U\}\right]^{-1}=\frac{1}{N-M}\sum_{j=M+1}^{N}\left[\{\gamma(\alpha^j,\beta^j)\}^{-1}\right]^{-1} \qquad (36)$$

باستعمال المقياس الاحصائي معدل المطلقة للتحيز بيز (BIAS) وفق الصيغة:

$$BIAS(\widehat{R}_k)=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left|R-\widehat{R}_k\right| \qquad (37)$$

وفق الصيغة : (MSE)وباستخدام معدل متوسط مربعات الخطأ

$$MSE(\widehat{R}_k)=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left(R-\widehat{R}_k\right)^2 \qquad (38)$$

## 11- المحاكاة Simulation :

تعرف المحاكاة بانها اسلوب رقمي يتضمن الكثير من العمليات الرياضية والمنطقية التي توصف سلوك الظاهرة الحقيقية من خلال ايجاد انموذج بديل يمثل الانموذج الحقيقي او يكون قريب منه وتتلخص المحاكاة

بسحب عينات من المجتمع الحقيقي ومن ثم ايجاد وصياغة سلسله من الارقام العشوائية المستقلة لعدة تجارب مختلفة والتكرار لعدة مرات مما يحقق الثقة والمرونة في الحصول على النتائج وباستخدام معادلة.

**11-1 نتائج المحاكاة**

باعتمادنا على البرنامج الاحصائي (R) وباخذ قيم مختلفة لعامل التوهين K وكالاتي ( 0.7 , 0.5 , 0.3 , 1 ) تم الحصول على النتائج النهائية للمحاكاة وكالاتي :

بحسب المعادلات (8) و(13) و(16) و كانت نتائج القيم التقديرية لدالة معَّولية نظام (Cascade 1+1) حسب الجداول (1) و(4) .

الجدول (1)

القيم الافتراضية والتقديرية لدالة معَّولية نظام (Cascade (1+1 عند k=0.3 k=0.5

| β | a | RC | n | MLE | BS1 | β | a | RC | n | MLE | BS1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 25 | 0.99144 | 0.99140 | 1 | 0.1 | 0.99191 | 25 | 0.98382 | 0.98373 |
| | 0.1 | 0.99501 | 50 | 0.99349 | 0.99345 | | | | 50 | 0.98895 | 0.98887 |
| | | | 100 | 0.99362 | 0.99366 | | | | 100 | 0.99006 | 0.99011 |
| | | | 25 | 0.89717 | 0.90039 | | 0.5 | 0.89524 | 25 | 0.85309 | 0.85719 |
| 1 | 0.5 | 0.93017 | 50 | 0.91701 | 0.91817 | | | | 50 | 0.87861 | 0.88008 |
| | | | 100 | 0.92262 | 0.92312 | | | | 100 | 0.88787 | 0.88835 |
| | | | 25 | 0.79760 | 0.80138 | | 1 | 0.76667 | 25 | 0.74854 | 0.75040 |
| | 1 | 0.83445 | 50 | 0.81954 | 0.82082 | | | | 50 | 0.75617 | 0.75707 |
| | | | 100 | 0.82947 | 0.82979 | | | | 100 | 0.75671 | 0.75734 |
| | | | 25 | 0.96803 | 0.96786 | 0.5 | 0.1 | 0.97319 | 25 | 0.95536 | 0.95515 |
| | 0.1 | 0.98308 | 50 | 0.97890 | 0.97879 | | | | 50 | 0.96468 | 0.96445 |
| | | | 100 | 0.98069 | 0.98076 | | | | 100 | 0.97011 | 0.97019 |
| | | | 25 | 0.80100 | 0.80426 | | 0.5 | 0.76667 | 25 | 0.73367 | 0.73689 |
| 0.5 | 0.5 | 0.83445 | 50 | 0.81864 | 0.82003 | | | | 50 | 0.75474 | 0.75579 |
| | | | 100 | 0.82863 | 0.82901 | | | | 100 | 0.76385 | 0.76404 |
| | | | 25 | 0.65845 | 0.66071 | | 1 | 0.58333 | 25 | 0.56946 | 0.57118 |
| | 1 | 0.68056 | 50 | 0.67373 | 0.67432 | | | | 50 | 0.57832 | 0.57885 |
| | | | 100 | 0.67840 | 0.67854 | | | | 100 | 0.58333 | 0.58333 |
| | | | 25 | 0.80156 | 0.80119 | 0.1 | 0.1 | 0.76667 | 25 | 0.74666 | 0.74643 |
| | 0.1 | 0.83445 | 50 | 0.81971 | 0.81932 | | | | 50 | 0.75755 | 0.75731 |
| | | | 100 | 0.82698 | 0.82717 | | | | 100 | 0.76128 | 0.76142 |
| | | | 25 | 0.40645 | 0.40963 | | 0.5 | 0.33473 | 25 | 0.28367 | 0.28971 |
| 0.1 | 0.5 | 0.43333 | 50 | 0.42111 | 0.42245 | | | | 50 | 0.31062 | 0.31327 |
| | | | 100 | 0.42829 | 0.42872 | | | | 100 | 0.32493 | 0.32576 |
| | | | 25 | 0.21506 | 0.22179 | | 1 | 0.19508 | 25 | 0.14542 | 0.15156 |
| | 1 | 0.26948 | 50 | 0.24594 | 0.24843 | | | | 50 | 0.17205 | 0.17448 |
| | | | 100 | 0.26045 | 0.26118 | | | | 100 | 0.18442 | 0.18529 |

باستعمال المقياس الاحصائي معدل المطلقة للتحيز بيز (BIAS) حسب المعادلة (35) و (37) ظهرت لدينا النتائج كما في الجداول (2) و(5) .

الجدول (2)

القيم المطلقة للتحيز (BIAS) لدالة معَّولية نظام (Cascade (1+1 المقدرة عند k=0.3 k=0.5

| β | a | n | MLE | BS1 | β | a | n | MLE | BS1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 25 | 0.00357 | 0.00361 | 1 | 0.1 | 25 | 0.00809 | 0.00818 |
| | 0.1 | 50 | 0.00152 | 0.00156 | | | 50 | 0.00296 | 0.00304 |
| | | 100 | 0.00139 | 0.00135 | | | 100 | 0.00185 | 0.00180 |
| | | 25 | 0.03300 | 0.02978 | | 0.5 | 25 | 0.04215 | 0.03805 |
| 1 | 0.5 | 50 | 0.01316 | 0.01200 | | | 50 | 0.01663 | 0.01516 |
| | | 100 | 0.00755 | 0.00705 | | | 100 | 0.00737 | 0.00689 |
| | | 25 | 0.03685 | 0.03307 | | 1 | 25 | 0.01813 | 0.01627 |
| | 1 | 50 | 0.01491 | 0.01363 | | | 50 | 0.01050 | 0.00960 |
| | | 100 | 0.00498 | 0.00466 | | | 100 | 0.00996 | 0.00933 |
| | | 25 | 0.01505 | 0.01522 | 0.5 | 0.1 | 25 | 0.01783 | 0.01804 |
| | 0.1 | 50 | 0.00418 | 0.00429 | | | 50 | 0.00851 | 0.00874 |
| | | 100 | 0.00239 | 0.00232 | | | 100 | 0.00308 | 0.00300 |
| | | 25 | 0.03345 | 0.03019 | | 0.5 | 25 | 0.03300 | 0.02978 |
| 0.5 | 0.5 | 50 | 0.01581 | 0.01442 | | | 50 | 0.01193 | 0.01088 |
| | | 100 | 0.00582 | 0.00544 | | | 100 | 0.00282 | 0.00263 |
| | | 25 | 0.02211 | 0.01985 | | 1 | 25 | 0.01387 | 0.01215 |
| | 1 | 50 | 0.00683 | 0.00624 | | | 50 | 0.00501 | 0.00448 |
| | | 100 | 0.00216 | 0.00202 | | | 100 | 0.00000 | 0.00000 |
| | | 25 | 0.03289 | 0.03326 | 0.1 | 0.1 | 25 | 0.02001 | 0.02024 |
| | 0.1 | 50 | 0.01474 | 0.01513 | | | 50 | 0.00912 | 0.00936 |
| 0.1 | | 100 | 0.00747 | 0.00728 | | | 100 | 0.00539 | 0.00525 |
| | 0.5 | 25 | 0.02688 | 0.02370 | | 0.5 | 25 | 0.05106 | 0.04502 |
| | | 50 | 0.01222 | 0.01088 | | | 50 | 0.02411 | 0.02146 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 100 | 0.00504 | 0.00461 | | | 100 | 0.00980 | 0.00897 |
| | 1 | 25 | 0.05442 | 0.04769 | | 1 | 25 | 0.04966 | 0.04352 |
| | | 50 | 0.02354 | 0.02105 | | | 50 | 0.02303 | 0.02060 |
| | | 100 | 0.00903 | 0.00830 | | | 100 | 0.01066 | 0.00979 |

وباستخدام معيار المقارنة MSE في المعادلة (38) تم معرفة اي الطريقتين افضل لتقدير دالة معوَّلية نظام (Cascade 1+1) تم الحصول على النتائج التالية وحسب الجداول (3) و(6) نستنتج من الجداول المذكورة ان افضل طريقة للتقدير هي باستعمال بيز حيث تمتلك اقل قيمة لمعيار المقارنة MSE لكافة تجارب المحاكاة ولكافة طرائق التقدير فان اقل قيم لمعدل متوسط مربعات الخطأ (MSE) كانت عند حجم عينة $(n = 100)$، تلتها قيم معدل متوسط مربعات الخطأ (MSE) عند حجم عينة $(n = 50)$، ثم قيم معدل متوسط مربعات الخطأ (MSE) عند حجم عينة $(n = 25)$.

الجدول (3)

قيم معدل متوسط مربعات الخطأ MSE لدالة معوَّلية نظام (1+1) cascade المقدرة عند k=0.3 k=0.5

| β | a | n | MLE | BS1 | β | a | n | MLE | BS1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 25 | 6.43e-04 | 6.43e-04 | 1 | 0.1 | 25 | 7.05e-04 | 7.07e-04 |
| | 0.1 | 50 | 2.92e-04 | 2.92e-04 | | | 50 | 3.09e-04 | 3.09e-04 |
| | | 100 | 1.42e-04 | 1.42e-04 | | | 100 | 1.53e-04 | 1.53e-04 |
| | | 25 | 6.11e-03 | 5.91e-03 | | 0.5 | 25 | 7.36e-03 | 7.03e-03 |
| 1 | 0.5 | 50 | 2.64e-03 | 2.61e-03 | | | 50 | 3.01e-03 | 2.96e-03 |
| | | 100 | 1.29e-03 | 1.28e-03 | | | 100 | 1.42e-03 | 1.42e-03 |
| | | 25 | 9.55e-03 | 9.28e-03 | | 1 | 25 | 9.39e-03 | 9.32e-03 |
| | 1 | 50 | 4.37e-03 | 4.34e-03 | | | 50 | 4.76e-03 | 4.74e-03 |
| | | 100 | 2.07e-03 | 2.07e-03 | | | 100 | 2.41e-03 | 2.40e-03 |
| | | 25 | 2.01e-03 | 2.01e-03 | 0.5 | 0.1 | 25 | 2.18e-03 | 2.19e-03 |
| | 0.1 | 50 | 8.57e-04 | 8.58e-04 | | | 50 | 9.62e-04 | 9.66e-04 |
| | | 100 | 4.26e-04 | 4.25e-04 | | | 100 | 4.39e-04 | 4.39e-04 |
| | | 25 | 9.32e-03 | 9.11e-03 | | 0.5 | 25 | 1.03e-02 | 1.01e-02 |
| 0.5 | 0.5 | 50 | 4.34e-03 | 4.30e-03 | | | 50 | 4.73e-03 | 4.71e-03 |
| | | 100 | 2.07e-03 | 2.07e-03 | | | 100 | 2.34e-03 | 2.34e-03 |
| | | 25 | 1.05e-02 | 1.04e-02 | | 1 | 25 | 1.07e-02 | 1.06e-02 |
| | 1 | 50 | 5.12e-03 | 5.11e-03 | | | 50 | 5.31e-03 | 5.30e-03 |
| | | 100 | 2.59e-03 | 2.59e-03 | | | 100 | 2.65e-03 | 2.65e-03 |
| | | 25 | 9.36e-03 | 9.39e-03 | 0.1 | 0.1 | 25 | 9.60e-03 | 9.61e-03 |
| | 0.1 | 50 | 4.33e-03 | 4.34e-03 | | | 50 | 4.70e-03 | 4.71e-03 |
| | | 100 | 2.12e-03 | 2.11e-03 | | | 100 | 2.34e-03 | 2.34e-03 |
| | | 25 | 8.73e-03 | 8.57e-03 | | 0.5 | 25 | 8.98e-03 | 8.40e-03 |
| 0.1 | 0.5 | 50 | 4.20e-03 | 4.17e-03 | | | 50 | 3.74e-03 | 3.62e-03 |
| | | 100 | 2.06e-03 | 2.05e-03 | | | 100 | 1.67e-03 | 1.65e-03 |
| | | 25 | 7.44e-03 | 6.75e-03 | | 1 | 25 | 5.39e-03 | 4.81e-03 |
| | 1 | 50 | 2.76e-03 | 2.65e-03 | | | 50 | 1.94e-03 | 1.83e-03 |
| | | 100 | 1.17e-03 | 1.16e-03 | | | 100 | 8.14e-04 | 7.96e-04 |

الجدول (4)

القيم الافتراضية والتقديرية لدالة معوَّلية نظام (1+1) cascade عند k=0.7 k=1

| β | a | RC | N | MLE | BS1 | β | a | RC | n | MLE | BS1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 25 | 0.98097 | 0.98087 | 1 | 0.1 | 0.98485 | 25 | 0.97476 | 0.97464 |
| | 0.1 | 0.98897 | 50 | 0.98585 | 0.98577 | | | | 50 | 0.97885 | 0.97869 |
| | | | 100 | 0.98681 | 0.98687 | | | | 100 | 0.98192 | 0.98200 |
| | | | 25 | 0.82065 | 0.82515 | | 0.5 | 0.83333 | 25 | 0.79604 | 0.79967 |
| 1 | 0.5 | 0.86687 | 50 | 0.84892 | 0.85050 | | | | 50 | 0.81324 | 0.81501 |
| | | | 100 | 0.86023 | 0.86066 | | | | 100 | 0.82468 | 0.82525 |
| | | | 25 | 0.70651 | 0.70767 | | 1 | 0.66667 | 25 | 0.66589 | 0.66599 |
| | 1 | 0.71786 | 50 | 0.71408 | 0.71440 | | | | 50 | 0.66604 | 0.66609 |
| | | | 100 | 0.71448 | 0.71469 | | | | 100 | 0.66639 | 0.66641 |
| | | | 25 | 0.94321 | 0.94296 | 0.5 | 0.1 | 0.95238 | 25 | 0.92767 | 0.92739 |
| | 0.1 | 0.96426 | 50 | 0.95810 | 0.95794 | | | | 50 | 0.94159 | 0.94130 |
| 0.5 | | | 100 | 0.96033 | 0.96043 | | | | 100 | 0.94637 | 0.94653 |
| | | | 25 | 0.70181 | 0.70338 | | 0.5 | 0.66667 | 25 | 0.65932 | 0.66004 |
| | 0.5 | 0.71786 | 50 | 0.71388 | 0.71423 | | | | 50 | 0.66519 | 0.66536 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 100 | 0.71595 | 0.71607 | | | | 100 | 0.66482 | 0.66498 |
| | 1 | 0.52273 | 25 | 0.48228 | 0.48728 | | 1 | 0.46667 | 25 | 0.41943 | 0.42527 |
| | | | 50 | 0.51041 | 0.51171 | | | | 50 | 0.44669 | 0.44881 |
| | | | 100 | 0.51392 | 0.51464 | | | | 100 | 0.45772 | 0.45844 |
| 0.1 | 0.1 | 0.71786 | 25 | 0.70959 | 0.70950 | 0.1 | 0.1 | 0.66667 | 25 | 0.66339 | 0.66334 |
| | | | 50 | 0.71155 | 0.71139 | | | | 50 | 0.66097 | 0.66082 |
| | | | 100 | 0.71393 | 0.71403 | | | | 100 | 0.66621 | 0.66623 |
| | 0.5 | 0.28363 | 25 | 0.22727 | 0.23394 | | 0.5 | 0.24242 | 25 | 0.18160 | 0.18879 |
| | | | 50 | 0.25829 | 0.26107 | | | | 50 | 0.21716 | 0.21994 |
| | | | 100 | 0.27213 | 0.27310 | | | | 100 | 0.23248 | 0.23332 |
| | 1 | 0.16035 | 25 | 0.10816 | 0.11462 | | 1 | 0.1342 | 25 | 0.08939 | 0.09493 |
| | | | 50 | 0.13901 | 0.14127 | | | | 50 | 0.11287 | 0.11512 |
| | | | 100 | 0.15169 | 0.15239 | | | | 100 | 0.12562 | 0.12631 |

الجدول (5)

القيم المطلقة للتحيز لدالة معًولية نظام cascade (1+1) المقدرة عند k=0.7 k=1

| β | a | n | MLE | BS1 | β | a | n | MLE | BS1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 25 | 0.00800 | 0.0081 | 1 | 0.1 | 25 | 0.01009 | 0.01021 |
| | | 50 | 0.00312 | 0.0032 | | | 50 | 0.00600 | 0.00616 6 |
| | | 100 | 0.00216 | 0.0021 | | | 100 | 0.00293 | 0.00285 |
| | 0.5 | 25 | 0.04622 | 0.04172 | | 0.5 | 25 | 0.03729 | 0.03366 |
| | | 50 | 0.01795 | 0.01637 | | | 50 | 0.02009 | 0.01832 |
| | | 100 | 0.00664 | 0.00621 | | | 100 | 0.00865 | 0.00808 |
| | 1 | 25 | 0.01135 | 0.01019 | | 1 | 25 | 0.00078 | 0.00068 |
| | | 50 | 0.00378 | 0.00346 | | | 50 | 0.00063 | 0.00058 |
| | | 100 | 0.00338 | 0.00317 | | | 100 | 0.00028 | 0.00026 |
| 0.5 | 0.1 | 25 | 0.02105 | 0.02130 | 0.5 | 0.1 | 25 | 0.02471 | 0.02499 |
| | | 50 | 0.00616 | 0.00632 | | | 50 | 0.01079 | 0.01108 |
| | | 100 | 0.00393 | 0.00383 | | | 100 | 0.00601 | 0.00585 |
| | 0.5 | 25 | 0.01605 | 0.01448 | | 0.5 | 25 | 0.00735 | 0.00663 |
| | | 50 | 0.00398 | 0.00363 | | | 50 | 0.00148 | 0.00131 |
| | | 100 | 0.00191 | 0.00179 | | | 100 | 0.00185 | 0.00169 |
| | 1 | 25 | 0.04045 | 0.03545 | | 1 | 25 | 0.04724 | 0.04140 |
| | | 50 | 0.01232 | 0.01102 | | | 50 | 0.01998 | 0.01786 |
| | | 100 | 0.00881 | 0.00809 | | | 100 | 0.00895 | 0.00823 |
| 0.1 | 0.1 | 25 | 0.00827 | 0.00836 | 0.1 | 0.1 | 25 | 0.00328 | 0.00333 |
| | | 50 | 0.00631 | 0.00647 | | | 50 | 0.00570 | 0.00585 |
| | | 100 | 0.00393 | 0.00383 | | | 100 | 0.00046 | 0.00044 |
| | 0.5 | 25 | 0.05636 | 0.04969 | | 0.5 | 25 | 0.06082 | 0.05363 |
| | | 50 | 0.02534 | 0.02256 | | | 50 | 0.02526 | 0.02248 |
| | | 100 | 0.01150 | 0.01053 | | | 100 | 0.00994 | 0.00910 |
| | 1 | 25 | 0.05219 | 0.04573 | | 1 | 25 | 0.04481 | 0.03927 |
| | | 50 | 0.02134 | 0.01908 | | | 50 | 0.02133 | 0.01908 |
| | | 100 | 0.00866 | 0.00796 | | | 100 | 0.00858 | 0.00789 |

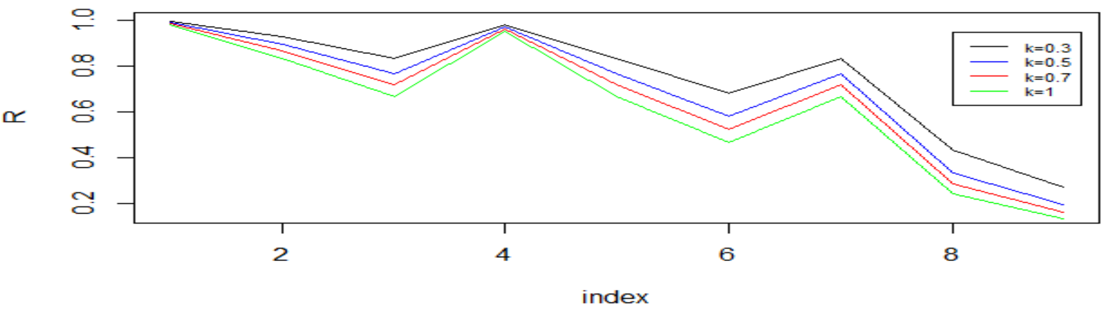
الجدول (6)

قيم معدل متوسط مربعات الخطأ لدالة معولية نظام cascade (1+1) المقدرة عند k=0.7 k=1

| β | a | n | MLE | BS1 | β | a | n | MLE | BS1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 25 | 7.24e-04 | 7.26e-04 | 1 | 0.1 | 25 | 7.82e-04 | 7.84e-04 |
| | | 50 | 3.10e-04 | 3.10e-04 | | | 50 | 3.56e-04 | 3.58e-04 |
| | | 100 | 1.55e-04 | 1.54e-04 | | | 100 | 1.59e-04 | 1.58e-04 |
| | 0.5 | 25 | 8.08e-03 | 7.68e-03 | | 0.5 | 25 | 7.62e-03 | 7.36e-03 |
| | | 50 | 3.24e-03 | 3.19e-03 | | | 50 | 3.53e-03 | 3.47e-03 |
| | | 100 | 1.52e-03 | 1.52e-03 | | | 100 | 1.63e-03 | 1.63e-03 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 25 | 9.53e-03 | 9.50e-03 | | 1 | 25 | 9.37e-03 | 9.37e-03 |
| | | 50 | 4.75e-03 | 4.75e-03 | | | 50 | 4.78e-03 | 4.78e-03 |
| | | 100 | 2.42e-03 | 2.42e-03 | | | 100 | 2.39e-03 | 2.39e-03 |
| 0.5 | 0.1 | 25 | 2.40e-03 | 2.41e-03 | 0.5 | 0.1 | 25 | 2.67e-03 | 2.68e-03 |
| | | 50 | 9.58e-04 | 9.60e-04 | | | 50 | 1.10e-03 | 1.10e-03 |
| | | 100 | 4.65e-04 | 4.65e-04 | | | 100 | 5.06e-04 | 5.04e-04 |
| | 0.5 | 25 | 9.66e-03 | 9.61e-03 | | 0.5 | 25 | 9.40e-03 | 9.39e-03 |
| | | 50 | 4.81e-03 | 4.80e-03 | | | 50 | 4.73e-03 | 4.73e-03 |
| | | 100 | 2.38e-03 | 2.38e-03 | | | 100 | 2.40e-03 | 2.40e-03 |
| | 1 | 25 | 1.14e-02 | 1.10e-02 | | 1 | 25 | 1.09e-02 | 1.04e-02 |
| | | 50 | 5.12e-03 | 5.09e-03 | | | 50 | 4.82e-03 | 4.74e-03 |
| | | 100 | 2.55e-03 | 2.54e-03 | | | 100 | 2.27e-03 | 2.26e-03 |
| 0.1 | 0.1 | 25 | 9.55e-03 | 9.55e-03 | 0.1 | 0.1 | 25 | 9.44e-03 | 9.44e-03 |
| | | 50 | 4.83e-03 | 4.83e-03 | | | 50 | 4.74e-03 | 4.74e-03 |
| | | 100 | 2.46e-03 | 2.45e-03 | | | 100 | 2.37e-03 | 2.37e-03 |
| | 0.5 | 25 | 8.38e-03 | 7.67e-03 | | 0.5 | 25 | 7.72e-03 | 6.90e-03 |
| | | 50 | 3.21e-03 | 3.08e-03 | | | 50 | 2.59e-03 | 2.46e-03 |
| | | 100 | 1.40e-03 | 1.38e-03 | | | 100 | 1.07e-03 | 1.05e-03 |
| | 1 | 25 | 4.84e-03 | 4.21e-03 | | 1 | 25 | 3.54e-03 | 3.07e-03 |
| | | 50 | 1.48e-03 | 1.38e-03 | | | 50 | 1.19e-03 | 1.10e-03 |
| | | 100 | 5.75e-04 | 5.63e-0 | | | 100 | 4.34e- | 4.22e-04 |

الشكل البياني التالي يوضح القيم الافتراضية لتقدير دالة معولية نظام Cascsde لجميع قيم عامل التوهين k المختلفة
.




الشكل (1) يبين القيم الافتراضية لدالة معولية نظام Cascsde لجميع قيم k

12- الاستنتاجات (Conclusions)

1. ان دالة المعوَلية نظام (الاجهاد – المتانة) Cascade (1+1) تقل بزيادة قيمة عامل التوهين k .
2. تزداد قيمة المعوَلية بقلة معلمة القياس للإجهاد ويقل MSE بتقليل عامل التوهين k .
3. ان تقدير معوَلية النظام المستخدم في هذا العمل باستخدام طريقة التقدير بيز (Bayes) كانت افضل من طريقة MLE وذلك لان قيم بيز (Bayes) اقل من خلال معيار المقارنة MSE .

13- التوصيات (Recommendations)

1- استعمال طرائق تقدير اخرى لتقدير معوَلية نظام الاجهاد – المتانة (1+1) Cascade.

2- استخدام نظام (2+1) cascade للإيجاد الاجهاد- المتانة للتوزيع الاسي .

14- المصادر

[1] Kotz , S. , Lumelskii , Y. & Pensky , M. (2003) . "The Stress – Strength Model and its Generalization " , Singapore : World Scientific Press.

[2] Mirajkar, R. , Kore, G.." Estimation of Cascade Reliability for Exponential distribution". International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR),(2015) , 3,Special Issue 2,
[3] Pandit S., Srivastav G, "Studies in cascade reliability I", IEEE Trans. Reliab. (1975),24, 53-57
[4] Mutkekar R., Munoli S.. "Estimation of Reliability for Stress-Strength Cascade Modell", Open Journal of Statistics. 2016; 6(5):873-881.
[5] Maheshwari T., Swathi N. "Cascade Reliability of Stress-strength System When Strength Follows Mixed Exponential Distribution", ISOR Journal of mathematics. 2013; 4(5):27-31.
[6] Mahdi Wahab Niemat Nasr Allah, Sana Ali Mohammed Aboudi, "Reliability of the cascade system for Stress-Strength System For the Inverse Lindley distribution, "THE IRAQI MAGAZINJE FOR MANAGERIAL SCIENCES. 2019, 15(61):132-147
[7] Maheswari, T. U. & Swathi, N.(2013). "Cascade Reliability for Generalized Exponential Distribution". International Journal Of Computational Engineering Research (ijceronline.com) Vol. 3 Issue. 1, PP 132-136
[8] Swathi, N.,(2020). "Reliability of Stochastic Stress Strength Models", Cambridge Scholars, UK.
[9] Casella , G. , Fienberg , S. & Oklin , I. (2007) . "The Bayesian Choice " , Springer Series in Statistics , Second Edition .
[10] Jack , M. (2009) . " Bayesian Analysis for the Social Sciences " , Wiley Series in Praobability and Statistics.
[11] Walsh, B., (2002), “Markov Chain Monte Carlo and Gibbs Sampling”, Lecture Notes for EEB 596Z.
[12] **Suess**, E. A. & **Trumbo**, B. E.(2010). "Introduction to Probability Simulation and Gibbs Sampling with R". Springer Science, New York

*************************************************************************************
*******************************************************************************
*******************************************************************

# Comparison between the two estimates of the possibility and bass function using the exponential distribution of the reliability function (Cascade, stress-strength)

**Researcher / Muhammad Zuhair Khalil Muhammad.**
muhammad.zuheer@gmail.com
**A. P. Dr. Rawaa Saleh Muhammad / rshnss69@yahoo.com**
**Al-Mustansiriya University / College of Administration and Economics**

**Abstract**

In this research, the mathematical equations for the reliability of the Cascade 1 + 1 system were derived for the (stress - toughness) variables that follow the exponential distribution, and the Cascade 1 + 1 system consists of two components, one of them is active and the other is ready (reserve) called the system (Stress - Durability (Cascade 1+1). As the failure of one of the components leads to the operation of the other spare component. Durability is represented by (v) and the system is subjected to stress represented by (u) in the presence of the attenuation factor (K), which corrects the path of the system as it improves the performance of the system by reducing the stress placed on the subsequent component that caused the failure of the previous component. In addition, two methods were used to estimate the reliability of the system (Cascade 1+1), which are the greatest possibility method (MLE) and Bayes method, and then the two methods were compared based on the mean squares error (MSE). The best method of estimation is the BES method.

**Keyword**: reliability, cascade 1+1, stress-durability, MLE, Bayes.

..............................................................................................................

..................................................................................................

...........................................................................................

-----------------------------------------------------------------------