تقدير معلمات انموذج (ARMA) عندما يتبع الخطأ العشوائي توزيع لندلي

الباحثة / رواء مالك حسوني rawaamalikhassooni@gmail.com
أ.م.د علي ياسين غني / الجامعة المستنصرية/ كلية الادارة والاقتصاد
badrawi66@uomustansiriyah.edu.iq

P: ISSN : 1813-6729
E : ISSN : 2707-1359
http://doi.org/10.31272/JAE.45.2022.132.19

تأريخ أستلام البحث : 2021/6/8 **مقبول للنشر بتأريخ :2021/7/4**

المستخلص .

تناول هذا البحث نوع من انواع النماذج التي اقترحها بوكس جينكينز وهو الانموذج المختلط ARMA(1,1) . والتي يمكن من خلالها التعامل مع السلاسل الزمنية سواء كانت مستقرة او غير مستقرة . تم استعراض النموذج وتعريف الدوال الخاصة به عندما يتبع الخطأ العشوائي التوزيع غير الطبيعي، واستعمل توزيع لندلي وهو من التوزيعات المستمرة . تم تقديم الاختبارات المناسبة للدراسة وقدرة معلمات الانموذج ARMA(1,1) بطريقة الامكان الاعظم ، تم ايضا تقدير معلمات توزيع لندلي بطريقة (MLS) اما في الجانب التطبيقي تم تحليل مجموعة من البيانات الحقيقية التي تمثل تدفق المياه في احد انهار المملكة المتحدة حيث تبين ملائمة التوزيع للبيانات وتحقق ان السلسلة مستقرة ، وفي تشخيص النموذج تبين ان النموذج المقترح هو ARMA(1,1).

المصطلحات الرئيسية للبحث : الانموذج المختلط ARMA ، التوزيع غير الطبيعي ، السلاسل الزمنية ، التوزيع لندلي ، تقدير المعلمات .

مجلة الادارة والاقتصاد
العدد 132 / اذار/ 2022
الصفحات : 260 - 278

بحث مستل من رسالة ماجستير

1- المقدمة .

يعتبر موضوع السلاسل الزمنية من المواضيع المهمة وخاصة في تحليل سلوك الظواهر المختلفة وتفسيرها والاستفادة منها في التخطيط والتنبؤ .ويعد تحليل السلاسل الزمنية احدى الوسائل المهمة في البحث العلمي فهي بحد ذاتها وسيلة وليس غاية. اي يمكن استخدام السلاسل الزمنية اينما وجد البحث العلمي سواء كان ذلك في مجال الاقتصاد، الزراعة، الصحة ، الصناعة وغيرها. حيث تعاقبت البحوث والدراسات وانصب اهتمام الباحثين على دراسة السلاسل الزمنية عندما يتبع الخطأ العشوائي التوزيع غير الطبيعي، بعد ظهور النسبة المرتفعة من السلاسل الزمنية غير الطبيعية وكيفية نمذجتها, فقد درس أنموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الاولى AR(1) الطبيعي وغير الطبيعي. وغيرها من النماذج. في بعض الدراسات السابقة للسلاسل الزمنية كان الافتراض انها تتبع التوزيع الطبيعي دون الرجوع الى توزيعها الدقيق. لكن ليس من الضروري انها تتبع التوزيع الطبيعي فقد تتبع توزيعات اخرى, هذا الافتراض قد يسبب مشكلة في عملية التقدير او عملية بناء النماذج او عملية التنبؤ. حيث يهدف هذا البحث الى دراسة بعض الخصائص الاحتمالية للانموذج المختلط ARMA(1,1) عندما يتبع الخطأ العشوائي توزيع لندلي.

2- السلاسل الزمنية :Time series

السلسلة الزمنية هي ترتيب زمني تتابعي من المشاهدات لمتغير معين.او هي مجموعة من القيم المشاهدة المأخوذة بفترات زمنية وهذه المجموعة هي المقطع المحدد للمتتابعة[5]

وتكون السلسلة الزمنية على شكلين اعتمادا على طبيعة المشاهدات الموجودة في المتتابعة يمكن ان تكون السلسلة مستمرة او متقطعة .ففي السلسلة الزمنية المستمرة (Continues Time Series) تتم المشاهدة في كل لحظة زمنية، مثل درجة الحرارة والاسعار. تكون ذات مشاهدات متصلة ، بينما في السلاسل الزمنية المتقطعة تتم المشاهدات في نقاط زمنية متقطعة تكون على شكل فترات متقطعة ثابتة حيث قد تكون يوم او شهر او سنة مثل هذه البيانات تكون ما يدعى بالسلسلة الزمنية المتقطعة (Discrete time series).

3- السلاسل الزمنية المستقرة

ان السلسلة الزمنية تكون مستقرة تماما اذا كانت خواصها لاتتأثر بتغير الزمن. وتكون ضعيفة الاستقرار (Weakly Stationary) اذا كانت دالة التباين المشترك الذاتي (Auto Covariance Function) للسلسلة تعتمد فقط على البعد الزمني بين القيم اي ان $(t_2 - t_1)$ اما الوسط الحسابي فيجب ان يكون ثابتا لجميع فترات **t** للسلسلتين المستقرة تماما او الضعيفة الاستقرارية. وتكون السلسلة غير مستقرة اذا لم يكن لها وسطا ثابتا وتباينا ثابتا اي ان قيمها تتذبذب حول عدة اوساط، ويمكن ملاحظة ذلك من خلال دالتي التغاير المشترك والارتباط بين (Z_t, Z_{t+k}) حيث نلاحظ اعتمادها على الزمن **t**.

ويوجد عدة اختبارات للكشف عن استقرارية السلسلة الزمنية منها:

3- 1 اختبار ديكي- فولر Augmented Dikey-Fuller Test:

ان اختبار ديكي- فولر المطور عام (1981) يعمل على البحث عن الاستقرارية او عدمها لسلسلة زمنية ما . **حيث يرمز له (ADF) ويكتب بالصيغة الاتية :[2]**

$$\nabla Y_t = \lambda Y_{t-1} - \sum_{j=2}^{p} \phi_j Y_{t-j+1} + \varepsilon_t \qquad (1)$$

أن Y_t يمثل القيمة الظاهرة في الزمن **t** ، **وأن** ε_t يمثل الخطأ العشوائي و**∇** يمثل معامل الفروق و**(ϕ,λ)** هي معلمات النموذج فيتم تقديرها بطريقة المربعات الصغرى **(OLS)**. وأن الفرضية المراد اختبارها هي:

$H_0: \lambda = 0$ السلسلة لها جذر وحدة (غير مستقرة)

$H_1: \lambda \neq 0$ السلسلة ليس جذر لها وحدة (مستقرة)

وان احصاء الاختبار هي:

$$ADF = \frac{\hat{\phi}}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}}} \qquad (2)$$

حيث يتم رفض فرضية العدم $H_\circ$ اذا كانت **قيمة (p – value) اقل من (0.05)** أي أن السلسة مستقرة , اما اذا كانت قيمة **(p – Value) اكبر من (0.05)** عدم رفض فرضية العدم اي السلسلة غير مستقرة

2-3 اختبار فيلبس –بيرون Phillips and Perron Test

اعتمد فيلبس- بيرون عام (1988) وهو من الاختبارات غير المعلمية حيث يعتبر فعالا ولا يأخذ بعين الاعتبار التباين الشرطي للاخطاء، ويعالج مشاكل الارتباط التسلسلي بعملية تصحيح لامعلمية. حيث يتم حساب احصاءة فيلبس- بيرون مع $K=\frac{\hat{\sigma}^2}{S_1^2}$ والذي يساوي (1-) في حالة التقاربية عندما تكون الاخطاء تشويش ابيض وان احصاءة الاختبار هي كالاتي:[2]

$$t_{\hat{\phi}}=\sqrt{K}\times\frac{(\hat{\phi}-1)}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}}}+\frac{T(K-1)\hat{\sigma}_{\hat{\phi}}}{\sqrt{K}} \qquad (3)$$

حيث ان:

T: يمثل عدد المشاهدات الكلية

$\hat{\sigma}^2$: هو التباين المقدر

S^2: يمثل معامل التصحيح (التباين طويل المدى).

وهذه الاحصاءة تقارن مع قيمة t الجدولية.

4 - دالة الارتباط الذاتي The Auto Correlation Function(ACF)

تعرف دالة الارتباط الذاتي والتي يرمز لها (**ACF**) للسلسلة الزمنية بأنها مقياس الارتباط بين (Z_t, Z_{t+k}) وهي وسيلة مهمة في تشخيص السلسلة وتخمين معلماتها. ان دالة الارتباط الذاتي ρ_k لسلسلة زمنية مستقرة بمتوسط M وتباين $\gamma_0=\sigma^2$ ودالة تغاير المشترك الذاتي γ_k وتكون بالصيغة الاتية:[8]

$$\rho_k=\frac{E(X_t-M)(X_{t+k}-M)}{E(X_t-M)^2}=\frac{\gamma_k}{\gamma_0} \qquad \cdots(4)$$

$$=\frac{EX_tX_{t+k}-M^2}{\sigma^2}$$

يمكن تلخيص دالة الارتباط الذاتي ρ_k كالاتي

ان دالتي الارتباط والتغاير الذاتي ρ_k و γ_k هي دوال زوجية اي

1-$\gamma_0=Var(Z_t)$ $\qquad \rho_0=1$

2-$\gamma_k\le\gamma_0$ $\qquad |\rho|\le 1$

3-$\gamma_k=\gamma_{-k}$ $\qquad \rho_k=\rho_{-k}$ $\qquad$ Z_t مستقرة لذلك فأن

هناك صعوبة في تفسير دالة الاراتباط الذاتي للعينة التي تسمى عادة معامل الارتباط الذاتي في حالة وجود العديد من العمليات غير الطبيعية لها نفس معامل الارتباط الذاتي

حيث تقدر دالة الارتباط الذاتي للعينة (**Sample Correlation Function**) من الصيغة الاتية:

$$\hat{\rho}_k=\frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}=\frac{\sum_{t=1}^{n-k}\left(Z_t-\bar{Z}\right)\left(Z_{t+k}-\bar{Z}\right)}{\sum_{t=1}^{n}\left(Z_t-\bar{Z}\right)^2} \qquad \text{…(5)}$$

$\bar{Z}$ تمثل الوسط الحسابي الكلي

$$\bar{Z}=\frac{\sum_{t=1}^{n}Zt}{N} \qquad \text{… (6)}$$

ولحجم العينة **N** يوجد(**N-1**) من معاملات الارتباط الذاتي اي ان

K=1,2,3………..,N-1

ان دالة الارتباط الذاتي في نموذج **ARMA** بعد الازاحة (**q-p**) تنحدر (تتناقص) بشكل اسي او بشكل موجات جيبية وهي تشبه سلوك نموذج **AR**

5 - دالة الارتباط الذاتي الجزئي(PACF)

Partial Autocorrelation Function

أن دالـة الارتبـاط الـذاتي الجزئـي Partial Autocorrelation Function التـي يرمـز لهـا بــ **(PACF)** تسخدم في تحديد النموذج المناسب للسلسلة الزمنية المستقرة,[8]

وان دالة الارتباط الذاتي الجزئي (PACF) هي المعاملات ϕ_{kk} المتأتية من الارتباط الذاتي بين Z_{t+k}, Z_t بعد ازالة تأثير $Z_{t+1}, Z_{t+2}, Z_{t+3}, \cdots\cdots Z_{t+k-1}$ أي:

$$Corr(Z_t, Z_{t+1} | Z_{t+1}, Z_{t+2} \cdots, Z_{t+k-1}) \qquad (7)$$

فاذا كانت لدينا $\{Z_t\}$ عملية مستقرة بحيث ان $EZ_t=0$ فلايجاد دالة الارتباط الذاتي الجزئي (PACF) نأخذ الانحدار الخطي لـZ_{t+k}الى $(Z_{t+1}, Z_{t+2}, \cdots, Z_{t+k-1})$ ويكون $\widehat{Z}_{t+k}$ أفضل تقدير خطي لـZ_{t+k} حيث ان:

$$\widehat{Z}_{t+1} = \alpha_1 Z_{t+k-1} + \alpha_2 Z_{t+k-2} + \cdots\cdots + \alpha_{k-1} Z_{t+1} \qquad (8)$$

α_i ;$(1 \le i \le k-1)$ تمثل معاملات متوسط مربعات الانحدار الخطي وتشتق من:

$$E(Z_{t+k}, \widehat{Z}_{t+k})^2 = E(Z_{t+k} - \alpha_1 Z_{t+k-1} - \cdots - \alpha_{k-1} Z_{t+k})^2) \qquad \cdots (9)$$

فنحصل من المعادلة اعلاه على النظام الخطي للمعادلات الاتية:

$$\gamma_i = \alpha_1 \gamma_{i-1} + \alpha_2 \gamma_{i-2} + \cdots\cdots + \alpha_{k-1} \gamma_{i-k+1} \qquad \cdots (10) \qquad \mathbf{(1 \le i \le k\text{-}1)}$$

Hence

$$\rho_i = \alpha_1 \rho_{i-1} + \alpha_2 \rho_{i-2} + \ldots + \alpha_{k-1} \rho_{i-k+1} \qquad (11)$$

وتكون المعادلة اعلاه بصيغة المصفوفات كمايأتي:

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \rho_{k-4} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

وبالطريقة نفسها فأن$\hat{Z}_t$ يكون افضل تقدير خطي لـZ_t كما يأتي:

$$\hat{Z}_t = \beta_1 Z_{t+1} + \beta_2 Z_{t+2} + \cdots\cdots + \beta_{k-1} Z_{t+k-1} \qquad \cdots (13)$$

حيث $(1 \le i \le k - 1)$;β_i تمثل معاملات متوسط مربعات الانحدار الخطي وتشتق من تدنية:

$$E(Z_t - \hat{Z}_t) = E(Z_t - \beta_1 Z_{t+1} - \beta_2 Z_{t+k} - \cdots - \beta_{k-1} Z_{t+k-1})^2$$

Hence

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \rho_{k-4} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

$\therefore\ \alpha_i = \beta_i\ (1 \le i \le k-1)$

وهذا يعني ان الارتباط الذاتي الجزئي بين Z_{t+k}, Z_t يساوي الارتباط الذاتي الاعتيادي بين $(Z_t - \widehat{Z}_t)$ و$(Z_{t+k} - \widehat{Z}_{t+k})$. وبأفتراض ان$\phi_{kk}$ تشير الى الارتباط الذاتي الجزئي بين Z_t و Z_{t+k} يكون:

$$\phi_{kk} = \frac{Cov[(Z_t - \widehat{Z}_t)(Z_{t+k} - \widehat{Z}_{t+k})]}{\sqrt{Var(Z_t - \widehat{Z}_t)}\sqrt{Var(Z_{t+k} - \widehat{Z}_{t+k}}} \qquad \cdots (15)$$

ومن ملاحظة البسط والمقام اعلاه وتبسيطهما نحصل على:

$$Var(Z_{t+k} - \widehat{Z}_{t+k}) = Var(Z_t - \widehat{Z}_t)$$
$$= \gamma_0 - \alpha_1 \gamma_1 - \cdots - \alpha_{k-1} \gamma_{k-1} \qquad \cdots (16)$$

وباستعمال الحقيقة ان

$$\boldsymbol{\alpha_i = \beta_i\ (1 \le i \le k-1)}$$

يكون:

$$Cov[(Z_t - \widehat{Z}_t)(Z_{t+k} - \widehat{Z}_{t+k})] = \gamma_k - \alpha_1 \gamma_{k-1} - \cdots - \alpha_{k-1} \gamma \qquad \cdots (17)$$

وبذلك فأن ϕ_{kk} تكون:

$$\phi_{kk} = \frac{\gamma_k - \alpha_1\gamma_{k-1} - \cdots - \alpha_{\tau-1}\gamma_1}{\gamma_O - \alpha_1\gamma_1 - \cdots - \alpha_{k-1}\gamma_{k-1}} = \frac{\rho_k - \alpha_1\rho_{k-1} - \cdots - \alpha_{k-1}\rho_1}{1 - \alpha_1\rho_1 - \cdots - \alpha_{k-1}\rho_{k-1}} \qquad (18)$$

حيث ϕ_{kk} تشير الى دالة الارتباط الذاتي الجزئي (PACF).
ان دالة الارتباط الذاتي الجزئي لنموذجARMA تنحدر بشكل اسي او تسلك سلوك دالة الجيب المتضائلة وتكون مشابهة لسلوك MA.

5 - اختبارات حسن المطابقة

قام الباحثان بأستعمال اختبارات حسن المطابقة لمعرفة مدى ملائمة التوزيعات المحددة للبيانات. وكالآتي:

1-5 اختبار Kolmogorove- Smirnov

هو من الاختبارات اللامعلمية حيث يعتمد على ايجاد التوزيع التراكمي لتكرارات القيم.حيث تختبر الفرضيات كالاتي:[4]

$H_0: F(x) = F(y)$
$H_1: F(x) \neq F(y)$

حيث **F(x)** ان هو التوزيع التراكمي لمشاهدات المجموعة الاولى في المجتمع و**F(y)** هو التوزيع التراكمي لمشاهدات المجموعة الثانية في المجتمع.
وتكتب صيغة احصاءة الاختبار بالصيغة الاتية:

$$D = Max_{1\le k\le r}[|S(x_k) - S(y_k)|] \qquad \cdots (19)$$

حيث ان **S(x)**هو محموع تكرارات العينة الاولى و S(y) مجموع تكرارات العينة الثانية وان D هي اكبر فرق مطلق بين التوزيعين التراكميين النسبيين حيث تقارن القيمة الحسابية ل D مع القيمة الجدولية من جدول Kolmogorove-Smirnov بحجم يساوي n ومستوى معنوية تساوي α .فأذا كانت القيمة المحسوبة ل D اكبر من نظيرتها القيمة الجدولية ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة.

2-5 اختبار مربع كاي Chi-Square Test

ان اختبار مربع كاي هو من الاختبارات اللامعلمية المستعملة لتحديد جودة التطابق ومن شروطه ان تكون بيانات العينة عشوائية ومستقلة .وان صيغته الاحصائية التالية:[4]

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O-E)^2}{E} \qquad \cdots (20)$$

حيث ان :
$\boldsymbol{O}$: تمثل قيمة المشاهدة اي القيمة الموجودة في جدول البيانات الخاصة بالتجربة
$\boldsymbol{E}$: القيمة المتوقعة

اذا كانت قيمة X^2 المحسوبة اكبر من الجدولية عند مستوى معنوية α ودرجة حرية (K-1) فأنه ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة.

3-5 اختبار اندريسون دارلنك Andereson Darling Test

ان هذا الاختبار يعتمد في حسابه على الدالة الاحتمالية التراكمية (CDF) ويرمز له (AD) يستخدم عندما تكون العينة من مجتمع ذو توزيع محدد.حيث ان صيغة الاختبار هي كالاتي:[7]

$$AD = -N - S \quad ,$$
$$S = \sum_{i=1}^{N} \frac{2i-1}{N}[lnF(xi) + \ln(1 - F(x_{N+1-I})] \qquad \cdots (21)$$

حيث ان N تمثل عدد المشاهدات
وان فرضيات الاختبار :

$\boldsymbol{H_0}$: التوزيع يمثل البيانات
$\boldsymbol{H_1}$: التوزيع لايمثل البيانات

فأذا كانت قيمة (AD) المحسوبة اصغر من قيمة (AD) الجدولية فأن التوزيع المحدد هو التوزيع الذي يمثل البيانات ، اما اذا كانت قيمة (AD) المحسوبة اصغر من القيمة الجدولية يدل على ان التوزيع لايمثل البيانات.

6- النماذج المختلطة (انحدار ذاتي- وسط متحرك) المستقرة

Stationary Mixed (Auto regressive-Moving Average)Models

ان هذا النوع من السلاسل الزمنية المستقرة غالبا يكون لها خصائص نموذجين الاول نموذج الانحدار الذاتي AR والثاني نموذج الوسط المتحرك MA ، لان هذا النوع من العمليات لايمكن تمثيلها بنموذج الانحدار الذاتي فقط او نموذج الوسط المتحرك فقط. حيث يسمى بالنموذج المختلط ويكون اختصاره **ARMA(p,q)** حيث تمثل **(p)** رتبة الانحدار الذاتي وتمثل **(q)** رتبة الوسط المتحرك.

لتكن $\{ Z_t \,;\, t = 0 \pm 1 \pm 2 \cdots\cdots\cdots \}$ تمثل سلسلة زمنية مستقرة حيث تكون صيغة النموذج المختلط.[1]

$$\boldsymbol{Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots\cdots + \phi_p Z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}} \qquad \cdots (\mathbf{22})$$

وبأستخدام معامل الازاحة الخلفي (Back Word Shift Operator) يكون كالاتي[5]

$$\boldsymbol{(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots\cdots - \phi_\rho B^\rho) Z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 \cdots\cdots \theta_q B^q) a_t}$$

او

$$\boldsymbol{\phi(B) Z_t = \theta(B) a_t}$$

وa_t :هي سلسلة الاخطاء العشوائية المستقلة ذات توزيع متطابق بمتوسط صفر وتباين ثابت $\boldsymbol{\sigma_a^2}$ وتسمى بسلسلة بالتشويش الابيض(White noise) $\boldsymbol{a_t \sim N(0, \sigma_a^2)}$.

$(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p)$: تمثل معلمات انموذج الانحدار الذاتي

$(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q)$: تمثل معلمات انموذج الوسط المتحرك

اي ان النموذج المختلط *ARMA (p,q)* يكون طبيعيا اذا كان توزيع الخطا العشوائي طبيعيا ويكون النموذج غير طبيعي اذا كانت $\mathbf{a_t}$ ذات توزيع غير طبيعي.[3]

ولكي تحقق شرط الاستقرارية للنموذج المختلط ***ARMA(p,q)*** يجب ان تقع جذور المعادلة $\boldsymbol{\phi(B)=0}$ خارج الدائرة التي نصف قطرها يساوي واحد .

ولتحقيق العملية قابلة للانعكاس (Invertiable) يجب ان يكون جذور المعادلة $\boldsymbol{\theta(B) = 0}$ خارج الدائرة التي نصف قطرها يساوي واحد.

7- الانموذج المختلط من الرتبة الاولى ARMA(1,1)

The First Order Mixed ARMA(1,1) Model

الصيغة الرياضية للانموذج *ARMA(1,1)* عندما يكون ***p=1,q=1*** ويكون كالاتي :[5]

$$\mathbf{Z_t = \phi_1 Z_t + \boldsymbol{a_t} - \theta_1 a_{t-1}} \qquad (23)$$

حيث ان$\boldsymbol{a_t}$ عملية التشويش الابيض(White noise) (سلسلة الاخطاء العشوائية) المستقلة ذات توزيع متطابق Identical وقد يكون هذا التوزيع طبيعيا او غير طبيعي.

ويمكن كتابة النموذج بصيغة عامل الازاحة *B [3]*

$$\mathbf{\phi(B) Z_t = \theta(B) a_t} \qquad \cdots (24)$$

وعملية ARMA(1,1) تكون مستقرة اذا كانت جذور المعادلة**($\boldsymbol{\phi}$ (B)=0)** تقع خارج دائرة الوحدة اي $\mathbf{|B| > 1}$ **وتؤدي الى** $\mathbf{|\phi| < 1}$

ويكون النموذج منعكس اذا كانت جذور المعادلة$\boldsymbol{(\theta(B) = 0)}$ تقع كلها خارج حدود الدائرة الاحادية اي$\boldsymbol{|B| > 1}$ **وتؤدي الى** $\boldsymbol{\theta < 1}$.

ويمكن التعبير عن النموذج*(1,1)* ARMA بصيغة الانحدار الذاتي AR**:**

$$\boldsymbol{\pi(B) Z_t = a_t} \qquad \cdots (25)$$

اذ ان

$$\pi(B) = (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 \cdots) = \frac{(1 - \phi B)}{(1 - \theta B)}$$

اي

$$\boldsymbol{(1 - \theta_1 B)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 \cdots) = (1 - \phi_1 B)}$$

$$\boldsymbol{[1 - (\pi_1 + \theta_1)B - (\pi_2 - \pi_1\theta)B^2 - (\pi_3 - \pi_2\theta_1)B^2 \cdots] = (1 - \phi_1 B)} \cdots (26)$$

وبمساواة معاملات$\boldsymbol{B^j}$$\boldsymbol{(j = 1, 2, 3 \cdots)}$ في كلا الطرفين

$$\boldsymbol{B: (\pi_1 + \theta) = -\phi \rightarrow \pi_1 = \phi - \theta}$$

$$\boldsymbol{B: -(\pi_2 - \pi_1\theta) = 0 \rightarrow \pi_2 = \theta(\phi - \theta)}$$

نحصل على الصيغة العامة:

$$\pi_j = \theta^{j-1}(\phi_1 - \theta_1) \qquad for\ j \geq 1 \qquad \cdots (27)$$

ويمكن التعبير عن نموذج ARMA (1, 1) بصيغة الوسط المتحرك MA
في تحليل السلسلة الزمنية يمكن كتابة السلسلة Z_t بوصفها تركيبا خطيا لسلسلة متعاقبة من المتغيرات العشوائية a_t اي بصيغة المعادلة الاتية .

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j\, a_{t-j} \qquad , \psi_0 = 1 \qquad (28)$$

او يمكن وضع الصيغة (28) بهيئة اخرى

$$Z_t = a_t + (\phi - \theta)\sum_{j-1}^{\infty} \phi^{j-1}\, a_{t-1} \qquad \cdots (29)$$

ان هذه الصيغة عامة لجميع نماذج السلاسل ولكنها تختلف من حيث قيمة الاوزان $\boldsymbol{\psi}$.

$$Z_t = \psi(B)a_t \qquad \cdots (30)$$

$$\psi(B) = \frac{(1 - \theta_1 B)}{(1 - \phi_1 B)} \qquad \cdots (31)$$

اذ ان:

$$(1 - \phi B)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \cdots) = (1 - \theta B)$$

وبمساواة معاملات B^j في الطرفين :

$$\psi_1 = \phi - \theta$$
$$\psi_2 = \phi\psi_1 = (\phi - \theta)\phi$$
$$\psi_j = (\phi - \theta)\phi^{j-1} \qquad , \qquad j \geq 1 \qquad \cdots (32)$$

8- توزيع لندلي Lindley Distiribution

هو توزيع اقترحه الباحث (D.v.lindley) عام (1958) وهو من التوزيعات المختلطة ناتج من خلط متغيرين عشوائيين احدهما يتبع التوزيع الاسي بمعلمة قياس Scal Parameter **(λ)** والمتغير الاخر يتبع توزيع كاما بمعلمة قياس **(λ)** و($\alpha = 2$) فأن دالة الكثافة الاحتمالية(**P.d.f**) له تكون:[6]

$$f(x;\lambda) = \pi_1 f_1(x;\lambda) + \pi_2 f_2(x;\lambda)$$

حيث إن π_2 *يساوي* $(1 - \pi_1)$ *وإن:*

$$f_1(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad ; \quad f_2(x;\lambda) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$$
$$f(x;\lambda) = \pi_1 \lambda e^{-\lambda x} + \pi_2 \lambda^2 x e^{-\lambda x}$$

وباستعمال الوزن $\pi_1 = \frac{\lambda}{\lambda+1}$

$$f(x;\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda+1}\lambda e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda+1}\lambda^2 x e^{-\lambda x}$$

بعد عدة عمليات نحصل على :

$$f(x;\lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda+1}(1+x)e^{-\lambda x} \qquad \cdots (33)$$

9- الدالة المولدة للعزوم والدالة المميزة للانموذج ARMA (1,1)

لأشتقاق الدالة المولدة للعزوم **(M.g.f)** للنموذج ARMA(1,1) من المعادلة (29)الاتية:

$$Z_t = a_t + (\phi - \theta)\sum_{j-1}^{\infty} \phi^{j-1}\, a_{t-1}$$

وبتطبيق التعريف الرياضي للدالة المولدة للعزوم فأن الدالة المولدة للعزوم للسلسلة Z_t ستكون:[3]

$$M_z(s) = \mathrm{E}(\exp(sZ_t))$$
$$= \mathrm{E}\left[\exp(sa_t + (\phi - \theta)\textstyle\sum_{j-1}^{\infty} \phi^{j-1} a_{t-j})\right]$$

$$M_z(s)=E(\exp(sa_t)\,.\,E(\exp(s(\phi-\theta)a_{t-1})).\,E(\exp(s\phi(\phi-\theta)a_{t-2})).\,E(\exp(\phi^2 s(\phi-\theta)a_{t-3}))\ldots\ldots$$

لأن الاخطاء a_t مستقلة عن بعضها البعض:

$$M_z(s)=M_a(s).\,M_a(s(\phi-\theta).\,M_a(s\phi(\phi-\theta).\,M_a(s\phi^2(\phi-\theta)\ldots\ldots$$

$$M_Z(s)=M_a(s)\prod_{k=1}^{\infty}M_a\left[\phi^{k-1}(\phi-\theta)s\right]\qquad\cdots(34)$$

الصيغة (34) تمثل الدالة المولدة للعزوم للسلسلة الزمنية (Z_t) بدلالة الدالة المولدة للعزوم للاخطاء a_t.
وبالطريقة نفسها يمكن اشتقاق الدالة المميزة للسلسلة الزمنية وبدلالة الدالة المميزة للاخطاء وكالاتي

$$\psi_z(s)=E[\exp(isZ_t]$$

اذ ان $i=\sqrt{-1}$ و s عدد حقيقي اختياري

$$\psi_z(s)=\psi_a(s)\prod_{k=1}^{\infty}\psi_a\left[\phi^{k-1}(\phi-\theta)s\right]\qquad\cdots(35)$$

سوف يتم اشتقاق الدالة المميزة للسلسلة المتولدة من الانموذج ARMA(1,1) عندما تتبع الاخطاء العشوائية بعض التوزيعات غير الطبيعية.

1-9 عندما تتبع الاخطاء a_t توزيع ليندلي Lindley Distribution

اذا كانت الاخطاء a_t تتبع توزيع ليندلي بمعلمة $(2,\lambda)$ فأن دالة الكثافة الاحتمالية كما في الصيغة (33)

$$f(x;\lambda)=\frac{\lambda^2}{\lambda+1}(1+x)e^{-\lambda x}$$

فأن الدالة المميزة للخطأ العشوائي

$$\psi_x(s)=E[e^{isx}]=\int_0^{\infty}e^{isx}\frac{\lambda^2}{\lambda+1}(1+x)e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^2}{\lambda+1}\int_0^{\infty}(1+x)e^{-(\lambda-is)x}dx$$

$$=\frac{\lambda^2(\lambda-is+1)}{(\lambda+1)(\lambda-is)^2}\qquad\cdots(36)$$

الدالة المميزة للسلسلة تكون كالاتي:

$$\psi_a(s)=\frac{\lambda^2(\lambda-is+1)}{(\lambda+1)(\lambda-is)^2}$$

وبالاستفادة من المعادلة (35) يمكن وضع صيغة للدالة المميزة للسلسلة (Z_t) عندما تتبع الاخطاء a_t توزيع ليندلي.

$$\psi_Z(s)=\psi_a(s)\prod_{j=1}^{\infty}\psi_a\left(s\phi^{j-1}(\phi-\theta)\right)$$

$$=\frac{\lambda^2(\lambda-is+1)}{(\lambda+1)(\lambda-is)^2}\prod_{j=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda^2(\lambda-is\phi^{j-1}(\phi-\theta)+1)}{(\lambda+1)(\lambda-is\phi^{j-1}(\phi-\theta))^2}\right]$$

$$=exp\left\{ln\left(\frac{\lambda^2(\lambda-is+1)}{(\lambda+1)(\lambda-is)^2}\right)+\left(\sum_{j=1}^{\infty}ln\left[\frac{\lambda^2(\lambda-is\phi^{j-1}(\phi-\theta)+1)}{(\lambda+1)(\lambda-is\phi^{j-1}(\phi-\theta))^2}\right]\right)\right\}\qquad\cdots(37)$$

هذه الصيغة لا تعطي مؤشراً باتجاه معين ولكن يمكن الاستفادة منها في إيجاد عزوم السلسلة Z.

10- دالة التوزيع الحدي للسلسلة Z_t عندما تتبع الأخطاء a_t توزيع ليندلي:

بالاستفادة من فكرة توزيع لندلي واعتماده على التوزيع الأسي وتوزيع كاما

$$f(x;\lambda)=\frac{\lambda}{\lambda+1}\lambda e^{-\lambda x}+\frac{1}{\lambda+1}\lambda^2 x e^{-\lambda x}$$

بالاستفادة من خواص تحويل لابلاس:

$$\begin{aligned}E\{e^{-sZ_t}\}&=\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)\frac{\lambda}{(\lambda+s)}+\left(\frac{1}{\lambda+1}\right)\frac{\lambda^2}{(\lambda+s)^2}\\&=\frac{\lambda^2}{(\lambda+1)(\lambda+s)}+\frac{\lambda^2}{(\lambda+1)(\lambda+s)^2}\\&=\frac{\lambda^2(\lambda+s+1)}{(\lambda+1)(\lambda+s)^2}\end{aligned}\qquad\cdots(38)$$

نلاحظ أن التوزيع الحدي للسلسلة Z_t يشابه التوزيع الحدي للأخطاء a_t وهو توزيع لندلي.

11- العزوم (الاول، الثاني، الثالث، الرابع) للانموذج ARMA (1,1) غير الطبيعي

ان العزوم السلسلة الزمنية اهمية في مراحل تحليلها ابتداء بالتشخيص والتقدير وفحص الملائمة ومن ثم التنبؤات المستقبلية ولها اهمية كبيرة في دراسة منحنيات التوزيعات التكرارية من حيث درجة التواءها وتفرطحها ومساهمتها في توليد بعض مقاييس النزعة المركزية.

للحصول على عزوم السلسلة Z_t نستخدم الدالة المميزة والاستفادة من العلاقتين .

حيث العزم من الرتبة m يتم إيجاده كالآتي:[3]

$$E[Z^m]=(-i)^m\psi_Z^{(m)}(0)\qquad\cdots(39)$$

حيث إن:

$$\psi_Z^{(m)}(0)=\left.\frac{\partial^{(m)}\psi_Z^{(m)}(s)}{\partial s^m}\right|_{s=0}\qquad\cdots(40)$$

m: (1,2,3 $\cdots$) عدد صحيح موجب

***11-1* العزوم الاربعة الاولى للسلسلة Z_t عندما تتبع الاخطاء a_t توزيع ليندلي.**

اذا كانت a_t تتبع توزيع ليندلي فأن الدالة المميزة للسلسلة Z_t المعتمدة على الصيغة (37)الاتية

$$\psi_Z(s)=exp\left\{ln\left(\frac{\lambda^2(\lambda-is+1)}{(\lambda+1)(\lambda-is)^2}\right)+\left(\sum_{j=1}^{\infty}ln\left[\frac{\lambda^2(\lambda-is\phi^{j-1}(\phi-\theta)+1)}{(\lambda+1)(\lambda-is\phi^{j-1}(\phi-\theta))^2}\right]\right)\right\}=\{Q(s)\}$$

نقوم بأيجاد مشتقة الدالة المميزة بالنسبة للمتغير **s** ونعوض عن **s=0** نحصل على:

$$\psi_Z'(0)=Q_1(0)exp\{Q(0)\}=i\left[\frac{(\lambda+2)(1-\theta)}{\lambda(\lambda+1)(1-\phi)}\right]\qquad\cdots(41)$$

$$\begin{aligned}\psi_Z''(0)&=\left[Q_2(0)+\left(Q_1(0)\right)^2\right]exp\{Q(0)\}\\&=i^2\left\{\left[\frac{(\lambda^2+4\lambda+2)(1-2\phi\theta+\theta^2)}{\lambda^2(\lambda+1)^2(1-\phi^2)}\right]+\left[\frac{(\lambda+2)(1-\theta)}{\lambda(\lambda+1)(1-\phi)}\right]^2\right\}\end{aligned}\qquad\cdots(42)$$

$$\psi_Z^{(3)}(0) = \left[Q_3(0) + 3Q_1(0)Q_2(0) + \left(Q_1(0)\right)^3\right] exp\{Q(0)\}$$
$$= i^3 \left\{2\left[\frac{(\lambda^3 + 6\lambda^2 + 6\lambda + 2)(1 - \phi^3 + (\phi - \theta)^3)}{\lambda^3(\lambda + 1)^3(1 - \phi^3)}\right] + 3\left[\frac{(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4\lambda + 2)(1 - 2\phi\theta + \theta^2)(1 - \theta)}{\lambda^3(\lambda + 1)^3(1 - \phi)(1 - \phi^2)}\right] + \left[\frac{(\lambda + 2)^3(1 - \theta)^3}{\lambda^3(\lambda + 1)^3(1 - \phi)^3}\right]\right\} \quad \cdots (43)$$

$$\psi_Z^{(4)}(0) = \left[Q_4(0) + 3\left(Q_2(0)\right)^2 + 4Q_1(0)Q_3(0) + 6\left(Q_1(0)\right)^2 Q_2(0) + \left(Q_1(0)\right)^4\right] exp\{Q(0)\}$$
$$= i^4 \left\{6\left[\frac{(\lambda^4 + 8\lambda^3 + 12\lambda^2 + 8\lambda + 2)(1 - \phi^4 + (\phi - \theta)^4)}{\lambda^4(\lambda + 1)^4(1 - \phi^4)}\right] + 3\left[\frac{(\lambda^2 + 4\lambda + 2)(1 - 2\phi\theta + \theta^2)}{\lambda^2(\lambda + 1)^2(1 - \phi^2)}\right]^2 + 8\left[\frac{(\lambda + 2)(1 - \theta)}{\lambda(\lambda + 1)(1 - \phi)}\right]\left[\frac{(\lambda^3 + 6\lambda^2 + 6\lambda + 2)(1 - \phi^3 + (\phi - \theta)^3)}{\lambda^3(\lambda + 1)^3(1 - \phi^3)}\right] + 6\left[\frac{(\lambda + 2)(1 - \theta)}{\lambda(\lambda + 1)(1 - \phi)}\right]^2\left[\frac{(\lambda^2 + 4\lambda + 2)(1 - 2\phi\theta + \theta^2)}{\lambda^2(\lambda + 1)^2(1 - \phi^2)}\right] + \left[\frac{(\lambda + 2)(1 - \theta)}{\lambda(\lambda + 1)(1 - \phi)}\right]^4\right\} \quad \cdots (44)$$

بالتعويض الدالة المميزة في المعادلة(39) الآتية نحصل على:

$$E[Z^m] = (-i)^m \psi_Z^{(m)}(0)$$
$$E[Z] = \frac{(\lambda + 2)(1 - \theta)}{\lambda(\lambda + 1)(1 - \phi)} \quad \cdots (45)$$
$$E[Z^2] = \left[\frac{(\lambda^2 + 4\lambda + 2)(1 - 2\phi\theta + \theta^2)}{\lambda^2(\lambda + 1)^2(1 - \phi^2)}\right] + \left[\frac{(\lambda + 2)(1 - \theta)}{\lambda(\lambda + 1)(1 - \phi)}\right]^2 \quad \cdots (46)$$
$$E[Z^3] = 2\left[\frac{(\lambda^3 + 6\lambda^2 + 6\lambda + 2)(1 - \phi^3 + (\phi - \theta)^3)}{\lambda^3(\lambda + 1)^3(1 - \phi^3)}\right] + 3\left[\frac{(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4\lambda + 2)(1 - 2\phi\theta + \theta^2)(1 - \theta)}{\lambda^3(\lambda + 1)^3(1 - \phi)(1 - \phi^2)}\right] + \left[\frac{(\lambda + 2)^3(1 - \theta)^3}{\lambda^3(\lambda + 1)^3(1 - \phi)^3}\right] \quad \cdots (47)$$

$$E[Z^4] = 6\left[\frac{(\lambda^4+8\lambda^3+12\lambda^2+8\lambda+2)(1-\phi^4+(\phi-\theta)^4)}{\lambda^4(\lambda+1)^4(1-\phi^4)}\right] + 3\left[\frac{(\lambda^2+4\lambda+2)(1-2\phi\theta+\theta^2)}{\lambda^2(\lambda+1)^2(1-\phi^2)}\right]^2 + 8\left[\frac{(\lambda+2)(1-\theta)}{\lambda(\lambda+1)(1-\phi)}\right]\left[\frac{(\lambda^3+6\lambda^2+6\lambda+2)(1-\phi^3+(\phi-\theta)^3)}{\lambda^3(\lambda+1)^3(1-\phi^3)}\right] + 6\left[\frac{(\lambda+2)(1-\theta)}{\lambda(\lambda+1)(1-\phi)}\right]^2\left[\frac{(\lambda^2+4\lambda+2)(1-2\phi\theta+\theta^2)}{\lambda^2(\lambda+1)^2(1-\phi^2)}\right] + \left[\frac{(\lambda+2)(1-\theta)}{\lambda(\lambda+1)(1-\phi)}\right]^4 \quad \cdots (48)$$

وبذلك فأن الوسط الحسابي والتباين لهذه السلسلة هما:

$$\mu_Z = E[Z] = \frac{(\lambda+2)(1-\theta)}{\lambda(\lambda+1)(1-\phi)}$$

$$\sigma_Z^2 = E[Z^2] - (E[Z])^2 = \frac{(\lambda^2+4\lambda+2)(1-2\phi\theta+\theta^2)}{\lambda^2(\lambda+1)^2(1-\phi^2)}$$

12- معاملا الالتواء والتفرطح للأنموذج ARMA (1,1) غير الطبيعي.

Coefficents of Skewness and Kurtosis For Non-Gaussian ARMA(1,1) Model.

الالتواء هومقدار اختلاف منحنى التوزيع التكراري عن حالة التماثل .او انه مقدار جنوح التوزيع نحو يمين خط التماثل او نحو يساره. علما بأنM_3 يسمى بمقياس التماثل Measure of Summitry، فالتوزيعات المتماثلة يكون عزمها المركزي الثالث حول المتوسط $(M_3 = 0)$ فأن معامل الالتواء لها مساوي للصفر .اما اذا كان$(M_3 > 0)$ فالتوزيع ملتوي نحو اليمين واذا كان$(M_3 < 0)$ فالتوزيع ملتوي نحو اليسار. والهدف من دراسة معامل الالتواء هو تكويم فكرة عن هيئة وشكل منحنى التوزيع التكراري . وان صيغة معامل الالتواء(Coefficient of Skewness) تلك التي تستخدم العزم الثالث.[1][3]

$$SK = \frac{E[Z-E[Z]]^3}{[\sigma_Z^2]^{3/2}} \quad \cdots (49)$$

اما معامل التفرطح فيعرف بأنه مقدار تسطح او تدبب (Peakedness) المنحنى التكراري لتوزيع معين وان مقدار تدبب او تسطح المنحنى التكراري يرتبط ارتباطا وثيقا بتشتت قيم ذلك التوزيع فكلما كان التشتت عاليا فذلك يدل على تسطح النحنى التكراري وعندما يكون التشتت واطئا فيدل على تدبب المنحنى.

ان معامل التفرطح (Coefficient of *Kurtosis*) الذي يستخدم العزم الرابع كما في الصيغة الاتية:

$$KUR = \frac{E[Z-E[Z]]^4}{[\sigma_Z^2]^2} \quad \cdots (50)$$

1-12 معاملا الالتواء والتفرطح للسلسلة عندما تتبع الاخطاء توزيع ليندلي

نستخدم العزوم الاربعة التي حصلنا عليها في الفقرة(11-1) وبأعتماد الصيغتين فأن(49) و(50):

العزم الثالث هو

$$E[Z-E[Z]]^3 = E[Z^3] - 3E[Z^2]E[Z] + 2(E[Z])^3 = 2\left[\frac{(\lambda^3+6\lambda^2+6\lambda+2)(1-\phi^3+(\phi-\theta)^3)}{\lambda^3(\lambda+1)^3(1-\phi^3)}\right]$$

ومعامل الالتواء كالاتي:

$$SK=\frac{E[Z-E[Z]]^3}{[\sigma_Z^2]^{3/2}}=\frac{2\left[\frac{(\lambda^3+6\lambda^2+6\lambda+2)(1-\phi^3+(\phi-\theta)^3)}{(1-\phi^3)}\right]}{\left[\frac{(\lambda^2+4\lambda+2)(1-2\phi\theta+\theta^2)}{(1-\phi^2)}\right]^{3/2}} \quad \cdots(51)$$

والعزم الرابع هو:

$$\begin{aligned}E[Z-E[Z]]^4 &= E[Z^4]-4E[Z^3]E[Z]+6(E[Z])^2E[Z^2]-3[E[Z]]^4\\ &=6\left[\frac{(\lambda^4+8\lambda^3+12\lambda^2+8\lambda+2)(1-\phi^4+(\phi-\theta)^4)}{\lambda^4(\lambda+1)^4(1-\phi^4)}\right]\\ &\quad+3\left[\frac{(\lambda^2+4\lambda+2)(1-2\phi\theta+\theta^2)}{\lambda^2(\lambda+1)^2(1-\phi^2)}\right]^2\end{aligned}$$

ومعامل التفرطح هو:

$$SK=\frac{E[Z-E[Z]]^3}{[\sigma_Z^2]^{3/2}}=\frac{2\left[\frac{(\lambda^3+6\lambda^2+6\lambda+2)(1-\phi^3+(\phi-\theta)^3)}{(1-\phi^3)}\right]}{\left[\frac{(\lambda^2+4\lambda+2)(1-2\phi\theta+\theta^2)}{(1-\phi^2)}\right]^{3/2}} \quad \cdots(52)$$

13- تقدير معلمات انموذج (1, 1) ARMA

Estimation Parameter of ARMA (1, 1) Model

في هذا المبحث سوف نقدر سلسلة ARMA(1.1) ، ولتقدير السلسلة لابد من تقدير معلمات التوزيع الأسي ذي المعلمتين و توزيع ليندلي ذو المعلمة الواحدة .بطريقة الامكان الاعظم (Maximum Likelihood Method (M.L.E.وهي احدى اهم طرائق التقدير التي تهدف الى جعل دالة الامكان في نهايتها العظمى.ويمكن الحصول عليها بأشتقاق لوغاريتم دالة الامكان ومساواتها بالصفر.وفي هذه الفقرة تم استخدام طريقة الإمكان الأعظم في تقدير المعلمات. وفي البدء نستطيع كتابة نموذج ARMA(1,1) كما في صيغة المعادلة(23) الاتية:

$$Z_t=\phi Z_{t-1}-\theta a_{t-1}+a_t$$
$$\Rightarrow a_t=Z_t-\phi Z_{t-1}+\theta a_{t-1}$$

عند *t=0* نفرض أن $a_0=0$ و $Z_0=0$ هذا يؤدي إلى:

$$\begin{aligned}a_1&=Z_1-\phi Z_0+\theta a_0=Z_1\\ a_2&=Z_2-\phi Z_1+\theta a_1=Z_2-\phi Z_1+\theta Z_1=Z_2-(\phi-\theta)Z_1\\ a_3&=Z_3-\phi Z_2+\theta a_2=Z_3-\phi Z_2+\theta[Z_2-(\phi-\theta)Z_1]\\ &=Z_3-(\phi-\theta)Z_2-\theta(\phi-\theta)Z_1\\ a_4&=Z_4-\phi Z_3+\theta a_3=Z_4-\phi Z_3+\theta[Z_3-(\phi-\theta)Z_2-\theta(\phi-\theta)Z_1]\\ &=Z_4-(\phi-\theta)Z_3-\theta^2(\phi-\theta)Z_2-\theta^3(\phi-\theta)Z_1\end{aligned}$$

وهكذا باستخدام الاستقراء الرياضي نحصل على:

$$\begin{aligned}a_t&=Z_t-(\phi-\theta)Z_{t-1}-\theta(\phi-\theta)Z_{t-2}-\theta^3(\phi-\theta)Z_{t-2}-\ldots-\theta^{t-1}(\phi-\theta)Z_1\\ &=Z_t-(\phi-\theta)\sum_{i=1}^{t-1}\theta^{i-1}Z_{t-i} \qquad t=2,3,\ldots,n \qquad \cdots(53)\end{aligned}$$

14- تقدير معلمات نموذج(1, 1 ARMA عندما يتبع الخطأ توزيع ليندلي

دالة الإمكان بالنسبة للخطأ العشوائي هي:

$$L(\phi,\theta,\lambda|\underline{a})=\left[\frac{\lambda^2}{\lambda+1}\right]^n\prod_{t=1}^{n}(1+a_t)\,e^{-\lambda\sum_{t=1}^{n}a_t}$$

حيث a_t معرفة في المعادلة (*53*). الآن بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لدالة الإمكان نحصل على:

$$\ell(\phi,\theta,\lambda)=2nln(\lambda)-nln(\lambda+1)+\sum_{t=1}^{n}ln(1+a_t)-\lambda\sum_{t=1}^{n}a_t$$

للحصول على مقدرات للمعلمات (ϕ,θ,λ) نشتق لوغاريتم دالة الإمكان بالنسبة لها وكما يأتي:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \phi}=\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{1+a_t}\frac{\partial a_t}{\partial \phi}-\lambda\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial a_t}{\partial \phi}=\sum_{t=1}^{n}\left[\frac{1}{1+a_t}-\lambda\right]\frac{\partial a_t}{\partial \phi}=0 \qquad \cdots\ (54)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta}=\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{1+a_t}\frac{\partial a_t}{\partial \theta}-\lambda\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial a_t}{\partial \theta}=\sum_{t=1}^{n}\left[\frac{1}{1+a_t}-\lambda\right]\frac{\partial a_t}{\partial \theta}=0 \qquad \cdots\ (55)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda}=\frac{2n}{\lambda}-\frac{n}{\lambda+1}-\sum_{t=1}^{n}a_t=\frac{n(\lambda+2)}{\lambda(\lambda+1)}-\sum_{t=1}^{n}a_t=0 \qquad \cdots (56)$$

وبحل منظومة المعادلات (54) - (56) بطرائق عددية نحصل على مقدرات المعلمات.

15- متوسط مربعات الخطأ Mean Square Error

لإيجاد متوسط مربعات الخطأ وكذلك القيم التنبؤية نقوم بالآتي:

$$Z_t=\phi Z_{t-1}-\theta a_{t-1}+a_t$$
$$\Rightarrow a_t=Z_t-\phi Z_{t-1}+\theta a_{t-1}$$

عند t=0 نفرض أن $a_0=0$ و $Z_0=0$ هذا يؤدي إلى:

$$a_1=Z_1-\phi Z_0+\theta a_0=Z_1$$
$$a_2=Z_2-\phi Z_1+\theta a_1=Z_2-\phi Z_1+\theta Z_1=Z_2-(\phi-\theta)Z_1$$
$$a_3=Z_3-\phi Z_2+\theta a_2=Z_3-\phi Z_2+\theta[Z_2-(\phi-\theta)Z_1]$$
$$=Z_3-(\phi-\theta)Z_2-\theta(\phi-\theta)Z_1$$
$$a_4=Z_4-\phi Z_3+\theta a_3=Z_4-\phi Z_3+\theta[Z_3-(\phi-\theta)Z_2-\theta(\phi-\theta)Z_1]$$
$$=Z_4-(\phi-\theta)Z_3-\theta^2(\phi-\theta)Z_2-\theta^3(\phi-\theta)Z_1$$

وهكذا باستخدام الاستقراء الرياضي نحصل على:

$$a_t=Z_t-(\phi-\theta)Z_{t-1}-\theta(\phi-\theta)Z_{t-2}-\theta^3(\phi-\theta)Z_{t-2}-\ldots-\theta^{t-1}(\phi-\theta)Z_1$$
$$=Z_t-(\phi-\theta)\sum_{i=1}^{t-1}\theta^{i-1}Z_{t-i} \qquad t=2,3,\ldots,n$$

وقيم a_t التقديرية نحصل عليها من المعادلة الآتية:

$$\hat{a}_1=Z_1$$
$$\hat{a}_t=Z_t-\left(\hat{\phi}-\hat{\theta}\right)\sum_{i=1}^{t-1}\hat{\theta}^{i-1}Z_{t-i} \qquad t=2,3,\ldots,n$$

والقيم التقدير للمتغير التابع كما يأتي:

$$\hat{Z}_t=\hat{\phi}Z_{t-1}-\hat{\theta}\hat{a}_{t-1}+\hat{a}_t$$

ولأن $\hat{a}_t$ غير متاح يتم التعويض عنه بتوقع الخطأ والذي يساوي:

$$\hat{a}_t=\frac{(\hat{\lambda}+2)}{\hat{\lambda}(\hat{\lambda}+1)} \quad if\ \ a_t\sim Lindley \qquad \cdots\ (57)$$

ومتوسط مربعات الخطأ هو:

$$MSE=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(Z_t-\hat{Z}_t\right)^2 \qquad \cdots (58)$$

الجانب التطبيقي :-

سيتم تحليل مجموعة من البيانات الحقيقية وبناء نموذج سلسلة زمنية من نوع الانحدار الذاتي ذو الرتبة (1) والأوساط المتحركة من نفس الرتبة أي ARMA(1,1)، حيث تمثل هذه المجموعة
معدل تدفق المياه مقاساً بالمتر المكعب في الساعة (m^3/h). لنهر Somerset Yeo في المملكة المتحدة للفترة ما بين 10-كانون الثاني-2021 إلى 28-شباط-2021 وقد تم الحصول على البيانات من موقع إنفايرمنت (environment.data.gov.uk/hydrology). والبيانات موضوعة في الجدول (1) وكما يأتي:

الجدول (1): بيانات تدفق المياه لنهر Somerset Yeo

Date time	Mean flow	Date time	Mean flow	Date time	Mean flow	Date time	Mean flow
10/01	1.56	23/01	4.5	05/02	5.73	18/02	8.83
11/01	1.52	24/01	5.4	06/02	4.45	19/02	6.72
12/01	2.11	25/01	4.43	07/02	3.43	20/02	17.9
13/01	2.21	26/01	5.21	08/02	2.73	21/02	7.81
14/01	2.64	27/01	5.53	09/02	2.46	22/02	6.71
15/01	2.56	28/01	8.76	10/02	2.18	23/02	4.84
16/01	5.94	29/01	8.83	11/02	2	24/02	3.81
17/01	3.77	30/01	22.4	12/02	1.88	25/02	3.11
18/01	3.19	31/01	10.2	13/02	1.78	26/02	2.78
19/01	6.41	01/02	7.36	14/02	8.16	27/02	2.13
20/01	37.9	02/02	7.69	15/02	11.1	28/02	1.88
Date time	**Mean flow**	**Date time**	**Mean flow**	**Date time**	**Mean flow**	**Date time**	**Mean flow**
21/01	14.6	03/02	5.16	16/02	8.39		
22/01	6.02	04/02	5.9	17/02	10.9		

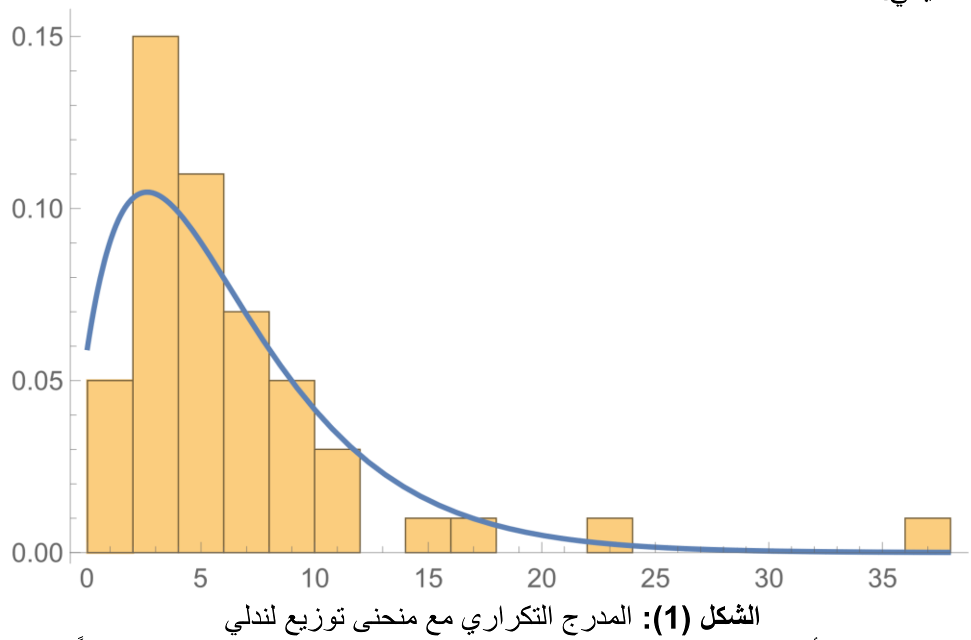
1- اختبار حسن المطابقة

تستخدم اختبارات حسن المطابقة لاختبار:

H_0: البيانات تتبع التوزيع لندلي

H_1: البيانات لا تتبع التوزيع لندلي

تم إنشاء البرنامج باستخدام برنامج Mathmetica لتبويب البيانات ورسم المدرج التكراري مع منحنى توزيع لندلي وكما يأتي:



الشكل (1): المدرج التكراري مع منحنى توزيع لندلي

نلاحظ من الشكل (1) أن توزيع السلسلة تتبع توزيع لندلي مما يعني ملاءمة التوزيع للبيانات وفقاً للرسم وللتأكد من ذلك تم الاختبار بمقاييس حسن المطابقة وكما يأتي:

الجدول (2): اختبارات حسن المطابقة لبيانات تدفق مياه النهر

Test	Kolmogorov-Smirnov	Anderson-Darling	Chi-Squared
Statistic	0.126303	1.15047	13.6
P-Value	0.126948	0.0782595	0.0928057

نلاحظ من الجدول (2) عدم رفض فرضية العدم التي تنص أن البيانات تتبع توزيع لندلي بالمعلمة ($\lambda =$ 0.2757) عند مستوى معنوية 0.05 لأن قيمة P-Value أكبر من مستوى المعنوية المحدد، مما يعني ملاءمة التوزيع للبيانات وفقاً لجميع المعايير.

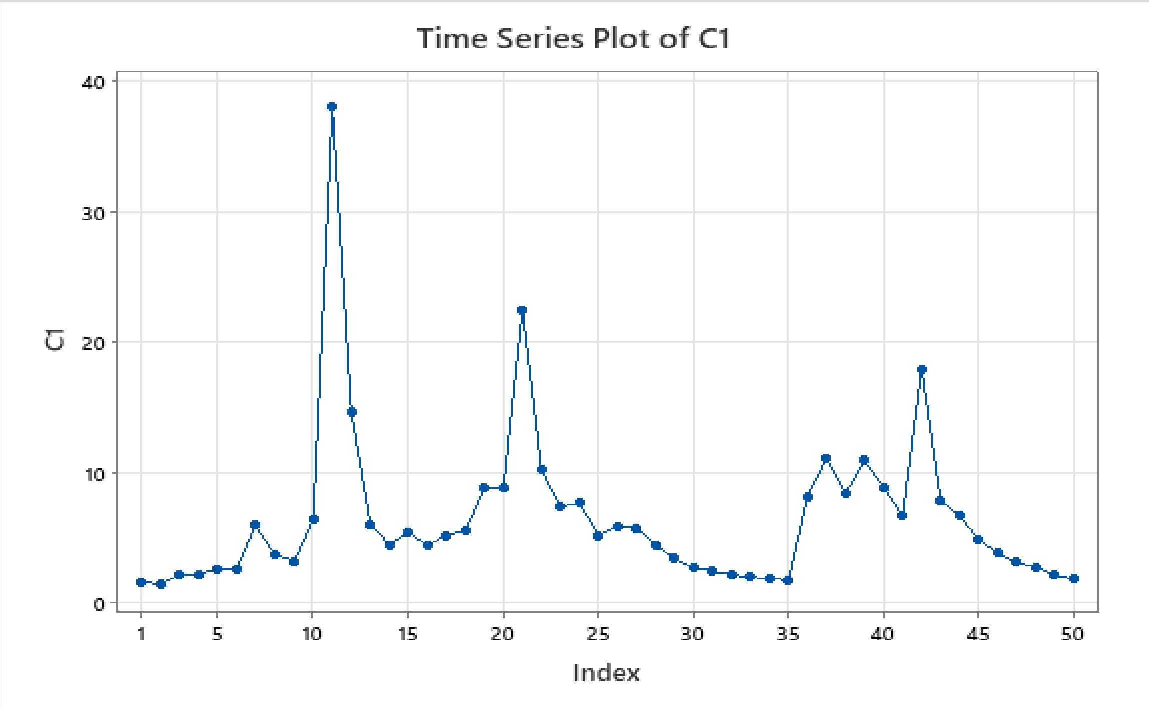
2- الاستقرارية

ان اختبار الفرضيات هي كالاتي:

$H_0: \lambda = 0$ السلسلة لها جذر وحدة (غير مستقرة)

$H_1: \lambda \neq 0$ السلسلة ليس جذر لها وحدة (مستقرة)

حيث تم رسم بيانات سلسلة تدفق المياه كما يأتي:



الشكل (2): رسم السلسلة الزمنية لبيانات تدفق مياه النهر

نلاحظ من الرسم أن السلسلة تبدو مستقرة وللتأكد من ذلك تم استخدام الاختبارين ديكي فولر الموسع وفيلبس بيرون عن طريق البرنامج الجاهز E Views 10 وكما يأتي:

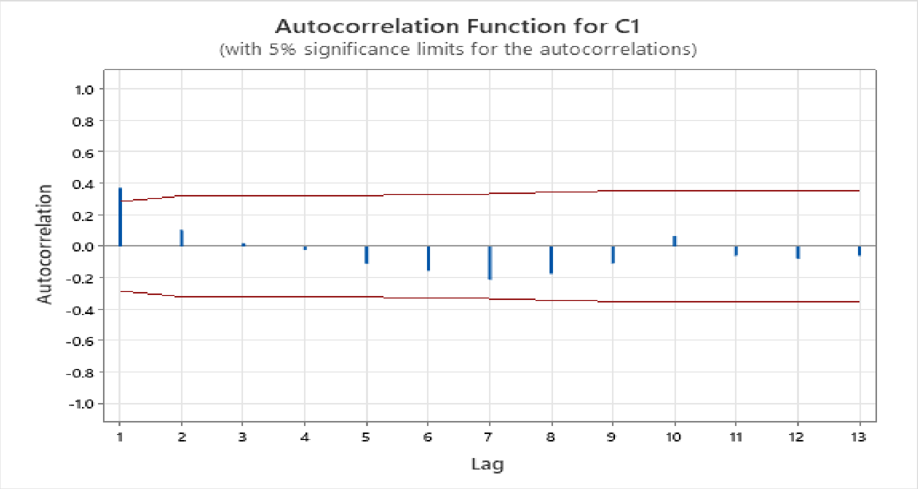
الجدول (3): نتائج اختبار ADF وPP لبيانات تدفق مياه النهر

Test	ADF	PP
Statistic	-4.629773	-4.633250
P-Value	0.0005	0.0004

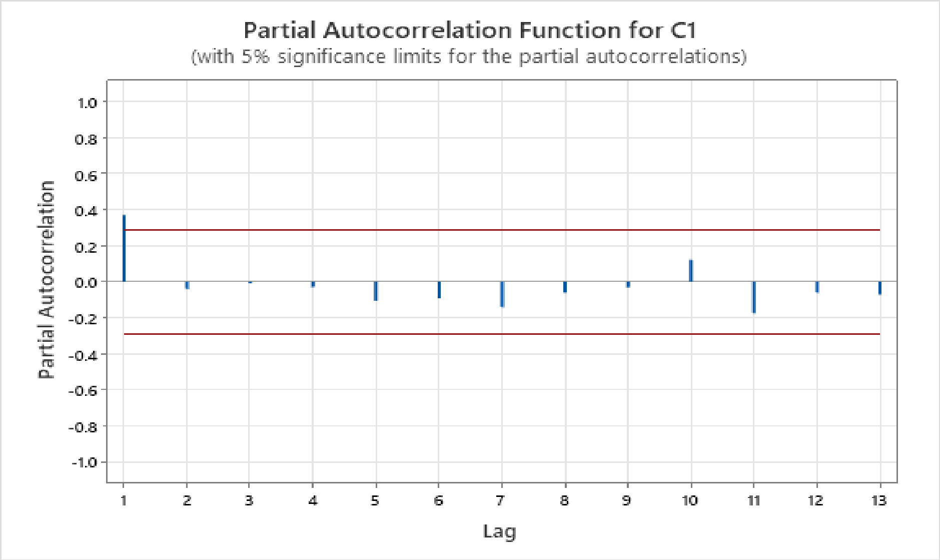
نلاحظ من الجدول (3) رفض فرضية العدم التي تنص أن البيانات تتبع توزيع لندلي بالمعلمة ($\lambda =$ 0.2757) عند مستوى معنوية 0.05 لأن قيمة P-Value اصغر من مستوى المعنوية المحدد.وبذلك تتحقق الاستقرارية في السلسلة الزمنية.

3- تشخيص النموذج :

تعتبر مرحلة التشخيص من المراحل المهمة في تحليل السلاسل الزمنية، وبالاعتماد على خصائص دالتي الارتباط الذاتي (ACF) والارتباط الذاتي الجزئي (PACF)، حيث يتم تشخيص النموذج بعد التأكد من استقرارية السلسلة. وقد تم رسم دالتي الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي لبيانات السلسلة الزمنية الخاصة بتدفق مياه النهر، وكما يأتي:



الشكل (3): دالة الارتباط الذاتي لبيانات تدفق مياه النهر



الشكل (4): دالة الارتباط الذاتي الجزئي لبيانات تدفق مياه النهر

نلاحظ من الشكلين (3) و(4) في دالة الارتباط الذاتي أن القيمة الأولى فقط هي معنوية أما بقية القيم هي ارتباطات غير معنوية وتتلاشى إلى الصفر. وفي دالة الارتباط الذاتي الجزئي أيضاً القيمة الأولى معنوية ولكن بقية الارتباطات غير معنوية، حيث يكون النموذج المقترح هو ARMA(1,1).

4- تقدير المعلمات:

سيتم تقدير المعلمات الخاصة بالعملية ARMA(1,1) وفق توزيع الخطأ الذي يتبع توزيع لندلي بناءً على طريقة الإمكان الأعظم باستعمال البرنامج الذي تمت كتابته بلغة البرمجة Matlab وكانت النتائج كالآتي:

الجدول (4): تقدير المعلمات نموذج ARMA(1,1) لبيانات تدفق مياه النهر.

$\hat{\phi}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	MSE
0.4778	-0.4271	0.6705	6.7435

نلاحظ من الجدول (4) أن قيمة $\boldsymbol{\hat{\phi} = 0.4778}$ تقع بين 1 و-1 وبذلك يتحقق شرط الاستقرارية، وأن $\boldsymbol{\hat{\theta} = -0.4271}$ هي الأخرى تقع ضمن نفس المدى وبذلك يتحقق شرط الانعكاس.

والمعادلة الآتية تمثل معادلة ARMA(1,1) التقديرية:

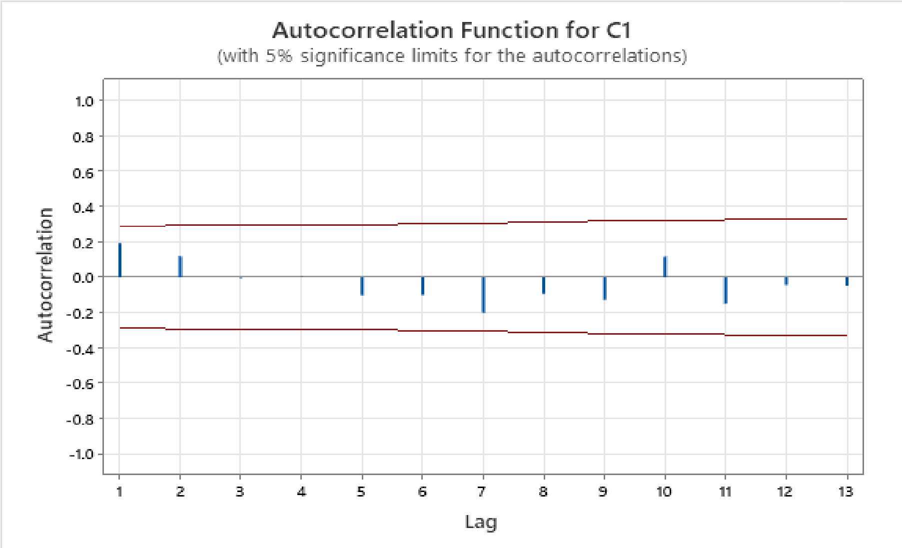
$$\boldsymbol{\hat{Z}_t = 0.4778Z_{t-1} + 0.4271\hat{a}_{t-1} + \hat{a}_t}$$

ويتم تقدير $\boldsymbol{\hat{a}_t}$ كما يأتي:

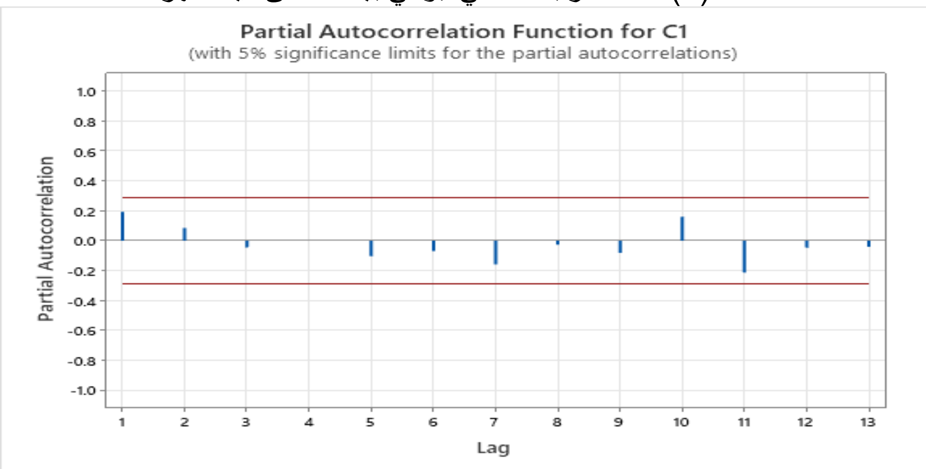
$$\hat{a}_t = \frac{(\hat{\lambda}+2)}{\hat{\lambda}(\hat{\lambda}+1)} = \frac{\mathbf{0.6705+2}}{\mathbf{0.6705(0.6705+1)}} = \mathbf{1.5986}$$

5- فحص النموذج

تم اختبار النموذج المقدر بالاعتماد على الرسم البياني لدالتي الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي للبواقي وكما يأتي:



الشكل (5): دالة الارتباط الذاتي لبواقي بيانات تدفق مياه النهر.



الشكل (6): دالة الارتباط الذاتي الجزئي لبواقي بيانات تدفق مياه النهر.

نلاحظ من الشكلين (5) و(6) أن معاملات الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي تقع ضمن حدي الثقة الأعلى والأدنى مما يعني على أن البواقي هي تشويش أبيض.

6- التنبؤ

تم استخدام النموذج ARMA للتنبؤ بمعدل تدفق المياه لنهر Somerset Yeo من 1 آذار إلى 5 آذار، أي التنبؤ بخمس قيم مستقبلية وكما يأتي:

الجدول (5): القيم المستقبلية لبيانات تدفق مياه النهر.

Date time	Mean flow
01/03	3.2445
02/03	3.4512
03/03	3.9305
04/03	4.1595
05/03	4.2689

الاستنتاجات :-

1- ان الاشتقاق الذي يربط مابين الدالة المميزة للسلسلة Z_t المتولدة من الانموذج المختلط ARMA(1,1) والدالة المميزة للاخطاء a_t توصلا الباحثان نظريا الى :

أ- اذا كانت الاخطاء تتبع توزيع لندلي فأن السلسلة الزمنية لاتعطي مؤشر بأتجاه معين ولكن يمكن الاستفاد منها في ايجاد عزوم السلسلة .

ب- عند دراسة دالة التوزيع الحدي للسلسلة التي تتبع توزيع لندلي وجد ان التوزيع الحدي للسلسلة يشابه التوزيع الحدي للاخطاء وهو توزيع لندلي.

2- ان الانموذج الذي يمثل معدل تدفق المياه المتمثلة بالتطبيق هو ARMA(1,1) عندما يتبع الخطأ توزيع لندلي.

3- سلسلة معدل تدفق المياه تمثل سلسلة زمنية مستقرة وذلك وفقا للرسم والاختبارات.

التوصيات:- Recommendations

1- استخدام رتب اعلى للانموذج المختلط ولتوزيعات اخرى.

2- امكانية دراسة السلاسل الزمنية متعددة المتغيرات في الدراسات المستقبلية

المراجع :-

1) المخلافي،فؤاد عبده اسماعيل (2003)"طرائق تشخيص نماذج السلاسل الزمنية المختلطة في الرتب الدنيا "اطروحة دكتوراه في الاحصاء-كلية الادارة والاقتصاد- الجامعة المستنصرية.

2) شيخي , محمد (2011) " طرق القياس الاقتصادي محاضرات وتطبيقات " استاذ وباحث في جامعة ورقلة , الجزائر, الطبعة الاولى ,الحامد.

3) العزاوي ،ماجد رشيد .(2001) حول بعض خصائص الانموذج المختلط ARMA(1,1) غير الطبيعي، اطروحة دكتوراه في الاحصاء كلية الادارة والاقتصاد،جامعة بغداد.

4) امين ابراهيم ادم (2005) ،المبادئ الاساسية الاحصائية في الطرق التطبيقية اللامعلمية ، كلية المعلمين في مكة المكرمة.

5) Box, G.E.P. and Jenkins , G.M. (1976), “Time Series Analysis Forecasting and control”, Holden day , Londan.

6) Ghitany, M. E., Atieh, B., & Nadarajah, S. (2008). “Lindley distribution and its application”. Mathematics and computers in simulation, 78(4), 493-506.

7) Romea, J.L.," A Goodness Of Fit Test For Small Sample", RAC START,Volume10,Number5, https://src.alionscience.com/pdf/A_DTest .pdf

8) Wei. William, W.S.; (1989), “Time-Series Analysis Univariate And Multivariate Methods”, Addison-Wesley Publishing Company Ine.

مصادر البيانات

9) (environment.data.gov.uk/hydrology)

****

****

****

Estimate the parameters of the ARMA model when the random error follows a Lindley distribution

Researcher / Rawa Malik Hassouni */rawaamalikhassooni@gmail.com*
A. P. Dr. Ali Yassin Ghani */* ***Al-Mustansiriya University / College of Administration and Economics***
badrawi66@uomustansiriyah.edu.iq

Abstract

This research deals with one of the types of models suggested by Box Jenkins, which is the mixed model ARMA (1,1). Which can deal with time series, whether stable or unstable. The model was reviewed and its functions defined when the random error follows the abnormal distribution, and the Lindley distribution, which is one of the continuous distributions, was used. Appropriate tests were presented for the study and the parameters of the ARMA (1,1) model were estimated by the greatest possible method. The parameters of the Landley distribution were also estimated using the (MLS) method. On the applied side, a set of real data was analyzed that represents the flow of water in one of the rivers of the United Kingdom, where it was found appropriate Distribution of the data and verify that the series is stable, and in diagnosing the model, it was found that the proposed model is ARMA (1,1).

Keyword : terms of the research: ARMA mixed model, abnormal distribution, time series, Landley distribution, parameter estimation.

****

****

****