نمذجة وتقدير دالة معولية النظام المتسلسل في حالة عدم تماثل مركباته

أ.م.د. بثينة عبدالجادر عبدالعزيز* الأء حسن جلوب**

المستخلص :

يتضمن هذا البحث نمذجة دالة معولية كل مركبة من مركبات النظام المتسلسل على افتراض عدم تماثل تلك المركبات كلا حسب طبيعة البيانات التشغيلية لها وذلك بوصفها بأنموذج رياضي يمثلها فهناك بعض البيانات التشغيلية التي تكون ثنائية القيمة تمثل بنجاح وفشل المركبة فيتم نمذجتها بأنموذج الانحدار اللوجستك لتمثيل معوليتها، وهناك بعض المركبات التي تعمل بين كل عطلين متتاليين فيتم نمذجتها بأنموذج الفشل الآسي وبعد اكتمال عملية النمذجة تم تقدير دالة معولية النظام المتسلسل بطرائق التقدير التقليدية والبيزية باستخدام الطرائق الآتية :

1- طريقة الامكان الأعظم (Maximum Likelihood Method) .
2- طريقة المقدر المنتظم غير المتحيز ذو أقل تباين(UMVUE Method) .
3- طريقة بيز القياسية(Standard Bayesian Method)- بيز القياسي باستخدام دالة كثافة احتمالية اولية غير معلوماتية- بيز القياسي باستخدام دالة كثافة احتمالية اولية مرافقة طبيعية.

ولغرض المقارنة بين أفضلية هذه المقدرات تم توظيف اسلوب المحاكاة بطريقة (Monte-Carlo) باستخدام المقياس الإحصائي (MSE) ، فتم التوصل الى أفضلية المقدر المنتظم غير المتحيز ذو أقل تباين مقارنة مع بقية المقدرات .

Abstract :

This research includes a function modeling the reliability of each compound from the series system compounds assuming anon symmetry of these compounds both by the nature of operational data have it as a mathematical model represented. There are some operational data which are binary value represents the success and the failure of the compound and is modeled by the Logistic Regression Model to represent Reliability, there some compounds that operate between each consecutive failures and modeled by exponential failure After modeling process is completed, reliability series system function is estimated in ways that classical appreciation and Bayes Method using the following methods:

1. *The method of maximum likelihood (Maximum Likelihood Method)*
2. *Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator Method (UMVUE Method)*
3. *Standard Bayesian Method*

---

* الجامعة المستنصرية / كلية الادارة والاقتصاد .
** باحث .
تأريخ استلام البحث 2016/7/13
تأريخ قبول النشر 2016/7/31
مستل من رسالة ماجستير

- Standard Bayesian Estimator By Using Non-Informative Prior p.d.f .
- Standard Bayesian Est. by Using Natural Conjugate Prior p.d.f .

For the purpose of comparison between the preference of these estimators were employed style simulation way (Monte-Carlo) using a statistical measure (MSE),we reach an estimated preference is UMVU Estimator Method than others estimators .

1- المقدمة Introduction

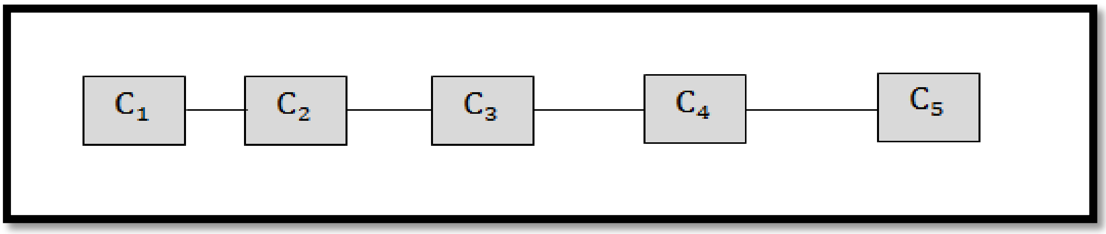
كما هو معلوم أن معولية أي نظام تقاس باستمرارية جودته لفترة زمنية محددة وكذلك هي مقياس أداء تلك الوظيفة التي صمم من أجلها ذلك النظام أو تلك المركبة في ظروف استعمال عادية وضمن فترة زمنية محددة ، لذلك نجد أن أغلب البحوث أنصب اهتمامها على مسألة تقدير معوليه مركبة في نظام معين باعتبار أن المركبات متماثلة باستخدام طرائق تقدير مختلفة كطرائق التقدير التقليدية مثل طريقة الإمكان الأعظم (Maximum likelihood) أو الطرائق التي تستند على المعلومات الأولية المتوفرة حول معلمات توزيع زمن الحياة لمركبة في نظام معين ومن هذه الطرائق هي طريقة بيز في التقدير (Bayes Method)، التي تعد المعلمة متغيرا عشوائيا له توزيعا معين.
يهتم هذا البحث بنمذجة دالة معوليه كل مركبة من مركبات النظام المتسلسل كلاً حسب طبيعة البيانات التشغيلية لكل مركبة اذ أن أزمان الحياة أي أزمان المعولية لأي مركبة من المركبات تعد متغير عشوائي يمكن توفيقه ليتبع في سلوكه أحدى التوزيعات الإحصائية المعروفة والتي تحتوي على بعض المعلمات(Parameters) التي تميز هذا التوزيع وتختزن بداخلها جميع خصائصه إذ أن هناك بعض البيانات التشغيلية التي تكون ثنائية القيمة تمثل بنجاح وفشل المركبة فيتم نمذجتها بأنموذج الانحدار اللوجستك لتمثيل معوليتها، وهناك بعض المركبات التي تعمل بين كل عطلين متتاليين فيتم نمذجتها بأنموذج الفشل الآسي .وعند اكتمال عملية النمذجة وبناء الانموذج بالشكل الملائم للظاهرة فأن ذلك يساعد على أجراء عملية التقدير لمعوليه النظام ،فكلما كان تمثيل الظاهرة في انموذج يستوفي خصائصها كافة كان التقدير الى حد ما دقيقا ،ومن ثم يكون القرار المأخوذ أكثردقة.

2- هدف البحث Goal of The Study

يهدف البحث الى نمذجة وتقدير دالة معولية كل مركبة من مركبات النظام المتسلسل باعتبار عدم تماثل هذه المركبات وذلك بالاعتماد على طبيعة البيانات التشغيلية لكل مركبة ، ومن ثم تقدير معولية النظام بأكمله بطريقتي التقدير التقليدية والبيزية ، ثم اختيار المقدر الأفضل باستخدام أسلوب المحاكاة بطريقة مونت – كارلو بالاعتماد على متوسط مربعات الخطأ (MSE) ، ومن اجل تحقيق الهدف الرئيس لهذه الدراسة تم مناقشة سلوك عدم تماثل مركبات الانظمة وتأثيرها في تلك المقدرات.

3- النظام المتسلسل Series System

عندما يكون لدينا نظام مؤلف من r من المركبات المربوطة بشكل متسلسل فأن النظام يكون عاملاً إذا وفقط إذا كانت جميع مركباته تعمل، بينما يتوقف النظام الكلي عن العمل إذا توقفت مركبة واحدة من مركباته، يمكن تمثيل مخطط ربط النظام بالشكل الآتي:



الشكل (1)
مخطط توضيحي يمثل ربط الانظمة المتسلسلة Series System

1-3 اشتقاق دالة معولية النظام المتسلسل Reliability Function of the Series System: [2]

نفترض لدينا نظام S مؤلفاً من المركبات المستقلة والمربوطة بشكل متسلسل، فأن الدالة الهيكلية للنظام تكون بالشكل الآتي:

$$\emptyset(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & \text{أذا كانت على الأقل مركبة واحدة عاطلة} \quad X_i = 0 \quad \forall \quad i = 1,2,\ldots,r \\ 1 & \text{أذا كانت جميع مركبات النظام عاملة} \quad X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots\ldots, X_r = 1 \end{cases}$$

وبالاعتماد على الدالة الهيكلية أعلاه يمكن التعبير عن دالة معولية النظام على النحو الاتي :

$$\mathbf{R_{SS}(t) = Pr[\emptyset(\underline{x}) = 1]}$$
$$\mathbf{R_{SS}(t) = Pr[X_1, X_2, \dots\dots\dots.., X_r = 1]}$$
$$\mathbf{R_{SS}(t) = Pr[X_1 = 1, X_2 = 1, \dots\dots..., X_r = 1]}$$

وبافتراض أن مركبات النظام مستقلة وغير متماثلة ، فأن معولية النظام ستكون :

$$\mathbf{R_{SS}(t) = Pr[X_1 = 1].Pr[X_2 = 1] \dots\dots.. Pr[X_r = 1]}$$
$$\mathbf{R_{SS}(t) = \prod_{i=1}^{r} Pr[X_i = 1] = \prod_{i=1}^{r} R_{\mathit{i}}(t|\Omega_i)} \qquad \dots\dots\dots (1)$$

بالتالي فان معولية النظام ستكون:

$$\mathbf{R_{SS}(t) = R_1(t|\Omega_1).R_2(t|\Omega_2) \dots\dots\dots. R_{\mathit{r}}(t|\Omega_r)} \qquad \dots\dots\dots (2)$$

من معادلة (2) يمكن ملاحظة أو تحديد معولية المركبة ذات أكبر تأثير في معولية النظام ذلك لأن المركبة ذات أقل معولية تفشل أولاً وبفشلها يفشل النظام .

$$\mathbf{R_{SS}(t) \le min\{R_1(t|\Omega_1), R_2(t|\Omega_2), \dots\dots., R_{\mathit{r}}(t|\Omega_r)\}}$$

4- نمذجة دالة معولية مركبات النظام المتسلسل

1-4 أنموذج الانحدار اللوجستك : Logistic Regression Model [4]

أن طبيعة البيانات التشغيلية لبعض مكونات المركبة تكون فيها فقط حالتان ممكنتا الحدوث وهي حالة (الفشل والنجاح) وهذا النوع من البيانات يطلق عليها بالبيانات الثنائية (Binary Data) ، حيث تأخذ قيمتين لتمثيل الظاهرة وهما (0)عطل المكون و(1) عمل المكون، وأن مجال عمل هذه المركبات يتبع توزيع برنولي الذي يستخدم في دراسة الظواهر ذات البيانات ثنائية الاستجابة، حيث أن :

$$\mathbf{Pr(T_2 = 1) = p = \ R_2(t|\Omega_2)}$$ احتمال نجاح المكون

$$\mathbf{Pr(T_2 = 0) = q = 1 - R_2(t|\Omega_2)}$$ احتمال فشل المكون

أن معولية المركبة المناسبة لهذا النوع من البيانات تأخذ أنموذج الانحدار اللوجستك (Logistic Regression Model) الذي يقوم على فرض أساسي ، هو أن معولية المكون هي متغير ثنائي يأخذ القيمة (1) باحتمال (R) والقيمة (0) باحتمال (1-R)،أي عمل المكون بنجاح وعطل المكون دون إصلاحه ذلك لأن تكاليف الإصلاح تكون أكبر من القيمة الحقيقية لكلفة المكون أضافة الى انخفاض فاعلية المكون ، ويعرف [Harver] [5] أنموذج الانحدار اللوجستك بأنه " الطريقة الإحصائية لنمذجة البيانات الثنائية ". وأن الشكل العام للدالة :

$$\mathbf{R_2(t|\Omega_2) = \frac{1}{1 + e^{-(\theta_0 + \theta_1 t)}}} \qquad , \qquad \mathbf{\Omega_2 = \{\theta_0\,, \theta_1\ \ge\ 0\}}$$

$$\mathbf{1 - R_2(t|\Omega_2) = 1 - \frac{1}{1 + e^{-(\theta_0 + \theta_1 t)}}}$$

من المعروف أن $\mathbf{0 \le R_2(\ \ |\Omega_2) \le 1}$، فأن النسبة $\mathbf{\frac{R_2(t|\Omega_2)}{1 - R_2(t|\Omega_2)}}$ عبارة عن مقدار موجب :

$$\mathbf{\frac{\frac{1}{1 + e^{-(\theta_0 + \theta_1 t)}}}{\frac{e^{-(\theta_0 + \theta_1 t)}}{1 + e^{-(\theta_0 + \theta_1 t)}}} = e^{(\theta_0 + \theta_1 t)}}$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للمقدار $\mathbf{\frac{R_2(t|\Omega_2)}{1 - R_2(t|\Omega_2)}}$ ، سينتج :

$$\mathbf{log\left(\frac{R_2(t|\Omega_2)}{1 - R_2(t|\Omega_2)}\right) = (\theta_0 + \theta_1 t)}$$

$$\mathbf{\therefore log\left(\frac{R_2(t|\Omega_2)}{1 - R_2(t|\Omega_2)}\right) = logit[R_2(t|\Omega_2)] = (\theta_0 + \theta_1 t)}$$

$$\mathbf{\therefore R_2(t|\Omega_2) = logit^{-1}(\theta_0 + \theta_1 t)} \qquad \dots\dots..(3)$$

وعليه بالاعتماد على طبيعة عمل المكونات داخل المركبة الواحدة، يمكن تمثيل حالات نجاح المكونات بدالة توزيع برنولي (Bernoulli Distribution) ، وعليه فأن دالة الإمكان للمشاهدات العشوائية ستكون كالآتي :

$$L_2\left(\frac{t}{\Omega_2}\right) = \prod_{s=1}^{m_2}[\, R_2(t)]^{t_{2s}}[1 - \, R_2(t)]^{1-t_{2s}} \qquad \ldots\ldots..(4)$$

2-4 أنموذج الفشل الأسي[2] :

عند دراسة أوقات الاشتغال لمركبات تبلغ عمراً معيناً فأن الفترات البينية بين كل عطلين متتاليين يطلق عليها (أوقات الحياة) ، وكما هو معلوم أن المكونات قد تفشل بعد فترة ما بعد الصفر ، وعندئذ يجب استخدام دالة فشل معرفة على الفترة $(0,\infty)$ للمتغير العشوائي (T) الذي يمثل وقت الفشل لأي وحدة ، ويعد أنموذج الفشل الأسي من نماذج الفشل الأكثر استخداما ، أذ يستخدم لنمذجة سلوك المكونات التي لديها نسبة الفشل المستمر (أي دون تردي أو تدهور المكون) ويشيع استخدامه في تطبيقات المعولية للأنظمة المختلفة وخاصة في الهندسة لكونه يتميز عن توزيعات الفشل المستمرة الأخرى بأن معدل الفشل لهذا التوزيع هو كمية ثابتة مع الزمن وهذا يشير الى أن أسباب الفشل لا تكون بسبب التقادم العمري للمركبة ، بل بسبب الحوادث العشوائية .

أن دالة المعولية للتوزيع ستكون كالآتي :

$$R_3(t|\Omega_3) = Exp(-\lambda t) \qquad ,\Omega_3 = \lambda \geq 0 \qquad \ldots\ldots..(5)$$

وأن دالة الكثافة التجميعية لهذا التوزيع وبالاعتماد على المعادلة (5) هي :

$$F(t_3,\lambda) = 1 - R_3(t|\Omega_3)$$

$$F(t_3,\lambda) = 1 - \exp(-\lambda t_3) \qquad \ldots\ldots..(6)$$

$$f(t_3,\lambda) = \frac{\partial F(t_3,\lambda)}{\partial t_3}$$

$$f(t_3,\lambda) = \lambda e^{-\lambda t_3} \qquad ; \quad t_3 \geq 0 \ , \qquad \lambda > 0 \qquad \ldots\ldots..(7)$$

حيث أن : λ تمثل معدل الفشل ومعلمة القياس (Scale Parameter).

أن دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع تمثل سلوك فشل المكونات، حيث أن دالة الإمكان للتوزيع ستكون كالآتي :

$$L_3(t/\Omega_3) = \prod_{k=1}^{m_3} \lambda e^{-\lambda t_{3k}} \qquad ,\Omega_3 = \lambda \qquad \ldots\ldots..(8)$$

5- دالة معولية النظام المتسلسل : Reliability Function of the Series System

سنفترض أن النظام المتسلسل يتكون من مركبتين اساسيتين هما (C_3, C_2)على التوالي ، اللتان تمثلان مركبة أنموذج الانحدار اللوجستك ومركبة أنموذج الفشل الأسي ، فأن دالة معولية النظام ستكون :

$$R_{SS}(t) = \prod_{i=1}^{r} R_i(t|\Omega_i) = \prod_{i=2}^{3} R_i(t|\Omega_i) = R_2(t|\Omega_2).\,R_3(t|\Omega_3) \ \ldots\ldots..(9)$$

$$R_{SS}(t) = \left[logit^{-1}(\theta_0 + \theta_1 t)\right][\exp(-\lambda t)] \qquad \ldots\ldots..(10)$$

6- طرائق تقدير دالة معولية النظام المتسلسل

1-6 طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Method: [1]

تعد طريقة الإمكان الأعظم من الطرائق الكلاسيكية المهمة في عملية التقدير، أذ تتمتع بخصائص عدة تميزها عن الطرائق الأخرى، ومنها خاصية (الكفاية Sufficient، الاتساق Consistency، عدم التحيز Unbiased وخاصية الثبات Invariance Property)، أذ تعد الخاصية الأخيرة من أهم خصائصها والتي يمكن توضيحها كالآتي:

لتكن $\hat{\lambda}$ تمثل مقدر الإمكان الأعظم للمعلمة λ،فإذا كانت الدالة $g(\lambda)$المعرفة على فضاء المعلمة Ω متباينة ،فأن $g(\hat{\lambda})$ هو مقدر الأمكان الأعظم للدالة $g(\lambda)$.

حيث أن هدف هذه الطريقة هو الوصول الى قيمة تقديرية للمعلمة λ تعمل على جعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى (Likelihood Function)، وعلى النحو الآتي :

$$L(\lambda; t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n) = \max\{L(\lambda; t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n), \lambda \in \Omega\}$$

وبحسب طبيعة ربط المركبات داخل النظام المتسلسل على افتراض وجود مركبتين (C_2, C_3) فأن دالة الإمكان للمشاهدات ستكون :

$$L = \left[\prod_{s=1}^{m_2} f(t_{2s})\right] \cdot \left[\prod_{k=1}^{m_3} f(t_{3k})\right]$$

$$L = \prod_{s=1}^{m_2} \left[[R_2(t|\Omega_2)]^{t_{2s}} [1 - R_2(t|\Omega_2)]^{1-t_{2s}}\right] \cdot \prod_{k=1}^{m_3} \left[\lambda e^{-\lambda t_{3k}}\right] \quad \ldots\ldots(11)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للمعادلة (11) ، نحصل على الآتي :

$$\ln L = \sum_{s=1}^{m_2} t_{2s} \operatorname{Ln}[R_2(t|\Omega_2)] + \left(m_2 - \sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}\right) \operatorname{Ln}[1 - R_2(t|\Omega_2)] + m_3 \operatorname{Ln}\lambda - \lambda \sum_{k=1}^{m_3} t_{3k} \quad \ldots\ldots(12)$$

وبأخذ المشتقة الجزئية لـ (LnL) بالنسبة للمعالم $[\lambda, R_2(t|\Omega_2)]$ كالآتي :

$$\frac{\partial \operatorname{LnL}}{\partial R_2(t|\Omega_2)} = \frac{\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}}{R_2(t|\Omega_2)} - \frac{m_2 - \sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}}{1 - R_2(t|\Omega_2)} \ldots\ldots\ldots(13)$$

$$\frac{\partial \operatorname{LnL}}{\partial \lambda} = \frac{m_3}{\lambda} - \sum_{k=1}^{m_3} t_{3k} \quad \ldots\ldots\ldots(14)$$

وبمساواة المشتقة الجزئية بالنسبة للمعالم $[\lambda, R_2(t|\Omega_2)]$ بالصفر، فأن مقدر الأمكان الأعظم سيكون :

$$\widehat{R_2(t|\Omega_2)} = \frac{\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}}{m_2} \quad , \quad \hat{\lambda} = \frac{m_3}{\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}}$$

وعليه فأن مقدر الامكان الأعظم لدالة معولية النظام المتسلسل ،سيكون على النحو الآتي :

$$\widehat{R_{SS}(t)} = \left[\frac{\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}}{m_2}\right] \left[\exp\left(-\frac{m_3}{\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}} t\right)\right]$$

2-6 طريقة المقدر المنتظم غير المتحيز ذو أقل تباين{6}

Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator Method

هي أحدى طرائق التقدير التقليدية التي يمكن من خلالها الحصول على مقدر وحيد غير متحيز للمعلمة أو دالة بالمعلمة المراد تقديرها من بين عدة مقدرات من خلال المقارنة بين تباينات تلك المقدرات، إذ يتم الحصول على مقدر (UMVUE) لدالة معولية النظام المتسلسل من خلال تطبيق أحدى المبرهنتين (Scheffe,Blackwell) وبتطبيق مبرهنة (Lehman Scheffe) والتي تتضمن أيجاد أحصاءة كافية وتامة (Complete & Sufficient Statistic) باستخدام العائلة الأسية (Exponential Family) للدوال التي تنتمي اليها، وعلى افتراض لدينا $T = (T_1, T_2, \ldots\ldots, T_n)^{\psi}$ تمثل عينة عشوائية وأن $\psi(T)$ هي دالة بدلالة المتغيرات $(T_1, T_2, \ldots\ldots, T_n)$ التي تمثل أحصاءة كافية وتامة ، وبأخذ التوقع الرياضي للدالة $\psi(T)$ يتم الحصول على مقدر (UMVUE) وعلى افتراض وجود مركبتين في النظام وكالتالي :

$$E[\psi(T_2)\ \psi(T_3)] = R_2(t|\Omega_2) R_3(t|\Omega_3) \ldots\ldots\ldots(15)$$

اذن بحسب نظرية (Le. Scheffe) وبما أن $\left(T_3 = \sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}, T_2 = \sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}\right)$ احصاءة كافية وتامة وتتبع التوزيع (ثنائي الحدين ، كاما) على التوالي ، اذن سينتج :

$$\int_0^\infty \psi(T_3)\frac{\lambda^{m_3}{T_3}^{m_3-1}}{\Gamma m_3}e^{-\lambda T_3}\,dT_3 \sum_{T_2=0}^{m_2}\psi(T_2)C_{T_2}^{m_2}[R_2(t|\Omega_2)]^{T_2}[1-R_2(t|\Omega_2)]^{m_2-T_2}$$
$$=[\mathrm{logit}^{-1}(\theta_0+\theta_1 t)][\exp(-\lambda t)]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

ولتبسيط المعادلة اعلاه ، نفرض أن :

$$K_1K_2=\ [\mathrm{logit}^{-1}(\theta_0+\theta_1 t)][\exp(-\lambda t)]\qquad \ldots\ldots(17)$$

اذن من المعادلة اعلاه ، فأن $[K_1]$ ، ستأخذ الصيغة :

$$\int_0^\infty \psi(T_3)\frac{\lambda^{m_3}{T_3}^{m_3-1}}{\Gamma m_3}e^{-\lambda T_3}\ dT_3=e^{-\lambda t}$$

$$\int_0^\infty \psi(T_3)\frac{\lambda^{m_3}{T_3}^{m_3-1}}{\Gamma m_3}e^{-\lambda(T_3-t)}\ dT_3=1$$

$$\int_0^\infty \frac{{T_3}^{m_3-1}}{(T_3-t)^{m_3-1}}\ \psi(T_3)\frac{(T_3-t)^{m_3-1}\lambda^{m_3}}{\Gamma m_3}e^{-\lambda(T_3-t)}\ dT_3=1$$

$$\int_0^\infty \frac{(T_3-t)^{m_3-1}\lambda^{m_3}}{\Gamma m_3}e^{-\lambda(T_3-t)}\ dT_3=1$$

$$\psi(T_3)=\frac{(T_3-t)^{m_3-1}}{{T_3}^{m_3-1}}=\left(\frac{T_3-t}{T_3}\right)^{m_3-1}$$

عليه سيكون مقدر دالة معولية المركبة C_3 ، على النحو الإتي :

$$\widehat{R_3(t|\Omega_3)}=\begin{cases}\left(\dfrac{T_3-t}{T_3}\right)^{m_3-1} & T_3\ge t\\ 0 & T_3\le t\end{cases}\qquad \ldots\ldots\ldots(18)$$

الان ومن المعادلة رقم (16) ، فأن $[K_2]$ ستأخذ الصيغة :

$$\sum_{T_2=0}^{m_2}\psi(T_2)C_{T_2}^{m_2}[R_2(t|\Omega_2)]^{T_2}[1-R_2(t|\Omega_2)]^{m_2-T_2}=\mathrm{logit}^{-1}(\theta_0+\theta_1 t)$$

$$\sum_{T_2=0}^{m_2}\psi(T_2)C_{T_2}^{m_2}[R_2(t|\Omega_2)]^{T_2-1}\,[1-R_2(t|\Omega_2)]^{m_2-T_2}=1$$

$$\sum_{T_2=1}^{m_2-1}\frac{C_{T_2}^{m_2}}{C_{T_2-1}^{m_2-1}}\psi(T_2)C_{T_2-1}^{m_2-1}[R_2(t|\Omega_2)]^{T_2-1}\,[1-R_2(t|\Omega_2)]^{(m_2-1)-(T_2-1)}$$

$$\sum_{T_2=1}^{m_2-1} \psi(T_2) C_{T_2-1}^{m_2-1} [R_2(t|\Omega_2)]^{T_2-1} [1 - R_2(t|\Omega_2)]^{(m_2-1)-(T_2-1)} = 1$$

$$\psi(T_2) = \frac{C_{T_2-1}^{m_2-1}}{C_{T_2}^{m_2}}$$

عليه سيكون مقدر دالة معولية المركبة C_2، على النحو الأتي :

$$\widehat{R_2(t|\Omega_2)} = \begin{cases} \frac{C_{T_2-1}^{m_2-1}}{C_{T_2}^{m_2}} & 1 \le T_2 \le m_2 - 1 \\ 0 & O.W \end{cases} \quad \dots\dots\dots (19)$$

اذن وبحسب ربط النظام المتسلسل وبالاعتماد على المعادلة رقم (10) ، فأن مقدر دالة المعولية للنظام ستكون على النحو الآتي :

$$\widehat{R_{SS}(t)} = \left(\frac{T_3 - t}{T_3}\right)^{m_3-1} \left(\frac{C_{T_2-1}^{m_2-1}}{C_{T_2}^{m_2}}\right) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (20)$$

3-6 طريقة بيز القياسي: Standard Bayes Method

أن أحد أساليب الطرائق البيزية شائعة الاستخدام هي طريقة بيز القياسي (Standard Bayes Method) ،والتي تعتمد على توظيف دالة التوزيع الاحتمالي الأولي (Prior Distribution)ودمجها مع دالة الإمكان للمشاهدات للحصول على دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة (Posterior Probability Density Function) التي تمثل كل المعلومات الأولية والحالية (معلومات العينة المشاهدة) حول المعلمات المراد تقديرها، ومنها يتم الوصول الى مقدر بيز القياسي الذي يجعل توقع دالة الخسارة (Loss Function) في نهايتها الصغرى .

أذن بموجب طريقة بيز القياسية يمكن الحصول على دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة للمعلمات العشوائية$[\lambda, R_2(t|\Omega_2)]$ ،التي يرمز لها بالرمز $[\pi(\Omega|\underline{T})]$ ،وذلك باستخدام صيغة بيز العكسية :

$$\pi(\Omega|\underline{T}) = \frac{L(\underline{T}|\Omega)\ g[R(t_2,\lambda)]}{\int_0^1 \int_0^\infty L(\underline{T}|\Omega)\ g[R(t_2,\lambda)]\ dR(t_2)\ d\lambda}$$

حيث أن :

$L(\underline{T},|\Omega)$: تمثل دالة الأمكان للمشاهدات .

$g[R(t_2,\lambda)]$: تمثل دوال الكثافة الأحتمالية الأولية المشتركة للمعالم العشوائية .

$$\begin{bmatrix} T_2 = t_{21}, t_{22}, t_{23}, \dots\dots, t_{2m_2} \\ T_3 = t_{31}, t_{32}, t_{33}, \dots\dots, t_{3m_3} \end{bmatrix}$$

أذن بموجب صيغة التناسب (Proportionality Formula)، سينتج :

$$\pi(\Omega|\underline{T}) \propto K_i\ L(\underline{T}|\Omega)\ g[R_2(t|\Omega_2),\lambda] \quad \dots.(21)$$

K_i: هو ثابت التناسب ويمثل دالة الكثافة الاحتمالية الحدية (Marginal .p.d.f)للمتغيرات العشوائية (T_2, T_3)، ويحسب وفق الصيغة الأتية :

$$K^{-1} = \int_0^1 \int_0^\infty L(\underline{T}|\Omega)\ g[R_2(t|\Omega_2),\lambda]\ dR_2(t) d\lambda \quad \dots.(22)$$

أن تحديد دالة الكثافة الاحتمالية الأولية للمعلمات المطلوب تقديرها أمراً مهماً في أيجاد مقدرات بيز، لذلك سيتم ايجاد التوزيع اللاحق للنظام المتسلسل على نوعين :

1-التوزيع اللاحق للنظام المتسلسل باستخدام دالة كثافة احتمالية اولية غير معلوماتية
Standard Bayesian Estimator By Using Non-Informative Prior p.d.f

بحسب اقتراح الباحث (Jeffery) وبالاعتماد على فضاء المعلمة يمكن تحديد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمعالم العشوائية $[R_2(t|\Omega_2),\lambda]$ ، وفقاً للصيغة الأتية :

$$g[R_2(t,\lambda)] \propto \frac{1}{\lambda\, R_2(t|\Omega_2)} \quad \ldots\ldots..(23)$$

عليه ستكون دالة الكثافة الاحتمالية الاولية المشتركة للمعالم $[R_2(t|\Omega_2),\lambda]$ ، كالأتي :

$$g[R(t_2),\lambda] \propto g[R(t_2,\lambda)]$$
$$g[R(t_2),\lambda] \propto \frac{1}{R_2(t|\Omega_2)\,\lambda} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

وعليه فأن دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة للمعالم العشوائية $[R_2(t|\Omega_2),\lambda]$ ، وبحسب صيغة التناسب **(Proportionality Formula)** يمكن وضعها بالشكل الآتي :

$$\pi_2\pi_3 = K_2K_3\,[R_2(t|\Omega_2)]^{\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}-1}\,[1-R_2(t|\Omega_2)]^{m_2-\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}}.\lambda^{m_3-1}e^{-\lambda\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}}$$

حيث أن ${K_2}^{-1}$ ، ستأخذ الصيغة الأتية :

$${K_2}^{-1} = \int_0^1 [R_2(t|\Omega_2)]^{\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}-1}[1-R_2(t|\Omega_2)]^{m_2-\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}}\, dR_2(t|\Omega_2)$$

$$= \frac{\beta[\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}\,,m_2-\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}+1]}{\beta[\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}\,,m_2-\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}+1]}\int_0^1 [R_2(t)]^{\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}-1}\quad [1-R_2(t)]^{m_2-\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}}\, dR_2(t|\Omega_2)$$

$${K_2}^{-1} = \beta\left[\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}\,, m_2-\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}+1\right] \quad \ldots\ldots\ldots(25)$$

أما ${K_3}^{-1}$ ،فستكون :

$${K_3}^{-1} = \int_0^\infty \lambda^{m_3-1}e^{-\lambda\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}}d\lambda$$

بفرض أن :

$$Z_0 = \lambda\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}\ ,\quad \lambda = \frac{Z_0}{\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}}\ ,\qquad \frac{dZ_0}{d\lambda} = \sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}\ ,\quad d\lambda = \frac{dZ_0}{\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}}$$

$${K_3}^{-1} = \int_0^\infty \left(\frac{Z_0}{\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}}\right)^{m_3-1} e^{-Z_0}\left(\frac{dZ_0}{\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}}\right) = \frac{\Gamma m_3}{[\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}]^{m_3}}$$

وعليه تكون دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة للمعلمتين العشوائيتين $[\lambda, R_2(t|\Omega_2)]$ كالآتي :

$$\pi_2\pi_3 = \frac{1}{\beta[\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}\,,m_2-\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}+1]}.\frac{[\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}]^{m_3}}{\Gamma m_3}e^{-\lambda\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}}$$
$$.\lambda^{m_3-1}[R_2(t|\Omega_2)]^{\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}-1}[1-R_2(t|\Omega_2)]^{Nm_2-\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}} \quad \ldots\ldots..(26)$$

وبحسب ربط مكونات النظام المتسلسل ، سيكون التوزيع اللاحق على النحو الأتي :

$$\pi_{ss} = \frac{1}{\beta[\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}\,,m_2-\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}+1]}.\,[R_2(t|\Omega_2)]^{\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}-1}[1-R_2(t|\Omega_2)]^{m_2-\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}}$$
$$\frac{[\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}]^{m_3}\,\lambda^{m_3-1}}{\Gamma m_3}e^{-\lambda\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}} \quad \ldots\ldots\ldots.\ (27)$$

1-1 مقدر بيز القياسي باستخدام دالة كثافة احتمالية اولية غير معلوماتية

بالاعتماد على التوزيع اللاحق الخاص بالمعادلة رقم (27) ، وباستخدام دالة خسارة تربيعية **(Squared Error Loss Function)** ، سيكون مقدر بيز القياسي وبحسب ربط مكونات النظام المتسلسل **(Series System)** على النحو الأتي :

$$\widehat{R_{SSBI}}(t) = E[R_{SS}(t)/T_2, T_3]$$

$$\widehat{R_{SSB_I}}(t) = \int_0^1\int_0^\infty R_{SS}(t)\pi_{SS}\ dR_2(t|\Omega_2)\ d\lambda = \int_0^1\int_0^\infty R_2(t|\Omega_2)R_3(t|\Omega_3)\pi_{SS}\ dR_2(t|\Omega_2)\ d\lambda$$

$$\widehat{R_{SSB_I}}(t) = \int_0^1\int_0^\infty \frac{1}{\beta[\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}, m_2 - \sum_{s=1}^{m_2} t_{2s} + 1]} \frac{[\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}]^{m_3}\lambda^{m_3-1}}{\Gamma m_3} e^{-\lambda\left(\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}+t\right)}$$

$$[R_2(t|\Omega_2)]^{\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}}[1 - R_2(t|\Omega_2)]^{m_2-\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}}\, dR_2(t|\Omega_2)\ d\lambda$$

$$\widehat{R_{SSBI}}(t) = \left[\frac{\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}}{m_2 + 1}\right]\left[\left(\frac{\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}}{\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k} + t}\right)^{m_3}\right] \qquad \ldots\ldots \quad (28)$$

2- التوزيع اللاحق للنظام المتسلسل باستخدام دالة كثافة احتمالية اولية مرافقة طبيعية [3]
Standard Bayesian Est. by Using Natural Conjugate Prior p.d.f

أن المرافقة الطبيعية (Natural Conjugate) للتوزيع ثنائي الحدين والتوزيع الأسي هو توزيع (بيتا ، كاما) على التوالي ،بدوال الكثافة الاحتمالية الأولية للمعالم العشوائية $[R_2(t|\Omega_2), \lambda]$ ، وعلى النحو الأتي :

$$g[R_2(t|\Omega_2)] = \frac{1}{\beta(a,b)}[R_2(t|\Omega_2)]^{a-1}[1 - R_2(t|\Omega_2)]^{b-1} \qquad , 0 < R_2(t) < 1$$

$$g[\lambda] = \frac{{\lambda_1}^{\lambda_0}}{\Gamma\lambda_0}\lambda^{\lambda_0-1}e^{-\lambda\lambda_1} \quad ; \quad \lambda, \lambda_0, \lambda_1 \geq 0$$

حيث أن $(a, b, \lambda_0, \lambda_1)$تمثل المعلمات الفوقية ، عليه ستكون دالة الكثافة الاحتمالية الأولية المشتركة للمعلمات العشوائية $R_2(t|\Omega_2), \lambda$ وفقاً للصيغة الاتية :

$$g[\lambda, R(t_2)] = \frac{{\lambda_1}^{\lambda_0}}{\Gamma\lambda_0}\lambda^{\lambda_0-1}e^{-\lambda\lambda_1}\frac{1}{\beta(a,b)}.[R_2(t|\Omega_2)]^{a-1}[1 - R_2(t|\Omega_2)]^{b-1} \qquad \ldots.(29)$$

وعليه فأن دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة بالنسبة للمعالم العشوائية $R_2(t|\Omega_2), \lambda$ وبحسب صيغة التناسب(Proportionality Formula)، ستكون على النحو الاتي :

$$\pi_2\pi_3 = k_2k_3[R_2(t|\Omega_2)]^{\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}+a-1}[1 - R_2(t|\Omega_2)]^{m_2-\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}+b-1}$$

$$\lambda^{m_3+\lambda_0-1}e^{-\lambda\left[\lambda_1+\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}\right]} \qquad \ldots.\ldots\ldots(30)$$

k_i يمثل ثابت التناسب، الذي يمكن الحصول عليه وفق الصيغة الأتية :

$$K_2^{-1} = \int_0^1 [R_2(t|\Omega_2)]^{\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}+a-1}[1 - R_2(t|\Omega_2)]^{m_2-\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}+b-1}\, dR_2(t|\Omega_2)$$

$$K_2^{-1} = \frac{\beta[\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s} + a, m_2 - \sum_{s=1}^{m_2} t_{2s} + b]}{\beta[\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s} + a, m_2 - \sum_{s=1}^{m_2} t_{2s} + b]}\int_0^1 [R_2(t|\Omega_2)]^{\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}+a-1}$$

$$[1 - R_2(t|\Omega_2)]^{m_2-\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}+b-1}\ dR_2(t|\Omega_2)$$

$$K_2^{-1} = \beta\left[\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s} + a, m_2 - \sum_{s=1}^{m_2} t_{2s} + b\right] \ldots\ldots\ldots \qquad (31)$$

وبأجراء نفس العملية لثابت التناسب K_3^{-1} ، سينتج :

$$K_3^{-1} = \int_0^\infty \lambda^{\lambda_0+m_3-1}\, e^{-\lambda[\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}+\lambda_1]}\, d\lambda$$

$$\text{let}\ , \qquad Z_0 = \lambda[\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k} + \lambda_1] \xrightarrow{\text{yields}} \lambda = \frac{Z_0}{\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k} + \lambda_1}$$

$$\frac{\partial Z_0}{\partial\lambda} = \sum_{k=1}^{m_3} t_{3k} + \lambda_1 \xrightarrow{\text{yields}} \partial\lambda = \frac{\partial Z_0}{\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k} + \lambda_1}$$

وبالتعويض في ثابت التناسب K_3^{-1}، سينتج :

$$\therefore K_3^{-1} = \int_0^\infty \left(\frac{Z_0}{\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k} + \lambda_1}\right)^{\lambda_0+m_3-1} e^{-Z_0} \quad .\frac{\partial Z_0}{\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k} + \lambda_1}$$

$$K_3^{-1} = \frac{\Gamma(\lambda_0 + m_3)}{[\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k} + \lambda_1]^{\lambda_0+m_3}} \qquad \ldots\ldots..(32)$$

عليه سيكون التوزيع اللاحق وبحسب ربط الأنظمة المتسلسلة ، على النحو الآتي :

$$\pi(\Omega|\underline{T}) = \frac{1}{\beta\left[\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s} + a, m_2 - \sum_{s=1}^{m_2} t_{2s} + b\right]} \left[\frac{[\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k} + \lambda_1]^{\lambda_0+m_3}}{\Gamma(\lambda_0 + m_3)}\right] e^{-\lambda\left[\lambda_1+\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}\right]}$$

$$\lambda^{m_3+\lambda_0-1}[R_2(t|\Omega_2)]^{\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}+a-1}[1 - R_2(t|\Omega_2)]^{m_2-\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}+b-1} \qquad \ldots(33)$$

1-2 مقدر بيز القياسي باستخدام دالة كثافة احتمالية اولية مرافقة طبيعية

بالاعتماد على التوزيع اللاحق الخاص بالمعادلة رقم (33) ، وباستخدام دالة خسارة تربيعية (Squared Error Loss Function) ، سيكون مقدر بيز القياسي وبحسب ربط مكونات الانظمة المتوازية (Series System) على النحو الآتي :

$$\widehat{R_{SSBG}}(t) = E\left[\frac{R_{SS}(t)}{T_2}, T_3\right]$$

$$= \int_0^1\int_0^\infty R_{SS}(t)\pi(\Omega|\underline{T})\ dR_2(t|\Omega_2)\ d\lambda = \int_0^1\int_0^\infty R_2(t|\Omega_2)R_3(t|\Omega_3)\ \pi(\Omega|\underline{T})\ dR_2(t|\Omega_2)\ d\lambda$$

$$= \int_0^1\int_0^\infty \left[\frac{[\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k} + \lambda_1]^{\lambda_0+m_3}}{\Gamma(\lambda_0 + m_3)}\right]\lambda^{m_3+\lambda_0-1}\quad e^{-\lambda\left[\lambda_1+\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}\right]} \frac{1}{\beta\left[\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s} + a, m_2 - \sum_{s=1}^{m_2} t_{2s} + b\right]}$$

$$[\exp(-\lambda t)\ * \text{logit}^{-1}(\theta_0 + \theta_1 t)][R_2(t|\Omega_2)]^{\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}+a-1}[1 - R_2(t|\Omega_2)]^{m_2-\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}+b-1}\ dR_2(t|\Omega_2)\ d\lambda$$

باجراء التبسيط المناسب للمعادلة اعلاه ، سينتج :

$$\widehat{R_{SSBG}}(t) = \int_0^1\int_0^\infty \left[\frac{[\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k} + \lambda_1]^{\lambda_0+m_3}}{\Gamma(\lambda_0 + m_3)}\right]\lambda^{m_3+\lambda_0-1}\quad e^{-\lambda\left[\lambda_1+\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k}+t\right]}\ [R_2(t|\Omega_2)]^{\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}+a+1-1}$$

$$\frac{1}{\beta\left[\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s} + a, m_2 - \sum_{s=1}^{m_2} t_{2s} + b\right]}[1 - R_2(t|\Omega_2)]^{m_2-\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s}+b-1}\quad dR_2(t|\Omega_2)\ d\lambda$$

بأجراء التكامل المباشرة للمعلمة $R_2(t|\Omega_2)$ ثم للمعلمة λ ، سينتج مقدر بيز باستخدام دالة كثافة احتمالية اولية مرافقة طبيعية لدالة معولية النظام المتسلسل ، الذي يرمز له بالرمز $\widehat{R_{SSBG}(t)}$ ، وكما مبين في ادناه :

$$\widehat{R_{SSBG}(t)} = \left[\frac{\sum_{s=1}^{m_2} t_{2s} + a}{m_2 + a + b}\right]\left[\left(\frac{\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k} + \lambda_1}{\sum_{k=1}^{m_3} t_{3k} + t + \lambda_1}\right)^{\lambda_0 + m_3}\right] \quad \dots\dots\dots\dots (34)$$

7- الجانب التجريبي

7-1 وصف مراحل تجارب المحاكاة :-

في هذه الفقرة سيتم وصف مراحـل تجــارب المحاكـــاة للنظام المتسلسل تباعاً ، وعلى النحو الآتي :-

المرحلة الأولى :

هنا سنفترض مدخلات النظام المتسلسل تباعاً ، كالاتي :

1- اختيار قيم افتراضية مختلفة للمعالم المتعلقة بالنظام المتسلسل،علما بأن عدد النماذج المستخدمة في الرسالة هي سبعة نماذج وتم اختيار ثلاثة نماذج مختلفة منها، كما مبينة في أدناه:

جدول (1)

يبين القيم الافتراضية المختلفة للمعالم المتعلقة بالنظام المتسلسل وللنماذج كافة

Model	1	2	3
$R_2(t\|\Omega_2)$	0.98	0.99	0.988
λ	0.1	0.03	0.04

2- تم اختيار قيم افتراضية للمعالم الفوقية للنظام المتسلسل ، وعلى النحو الآتي :

جدول (2)

يبين القيم الافتراضية للمعالم الفوقية للنظام المتسلسل ولكافة النماذج

component	2	2	2	2	3	3	3	3
Parameters	a	b	a1	b1	λ_0	λ_{00}	λ_1	λ_{11}
Value	0.01	0.02	0.1	0.2	2	3	1	2

3- تم اختيار ستة أحجام للعينات ، وعلى النحو الآتي m=10,20,30,40,50,100

4- تم اختيار خمسة أوقات لتقدير دالة معولية النظامين ، وعلى النحو الآتي t=2,4,6,8,10

المرحلة الثانية :

في هذه المرحلة ستولد المتغيرات العشوائية (البيانات) بما يتلاءم مع التوزيع الاحصائي المفروض، على وفق الخطوات الآتية :-

1- توليد متغيرات عشوائية (U_i) تتبع التوزيع المنتظم (Uniform Distribution) المستمر المعرف على الفترة (0,1) عن طريق الحاسبة الالكترونية ، على وفق الصيغة الآتية :

$$U_i = RND \quad , \quad U_i \sim UN(0,1) \qquad \forall \quad i = 1,2,3$$

2- تحويل المتغير العشوائي المنتظم الى متغير عشوائي يصف الأنموذج تحت التجربة .

بالنسبة للمركبة الاولى سيتم توليد بيانات تتبع توزيع برنولي باستخدام الطريقة المركبة (Composition Method) والتي تتلخص بما يأتي :

- اذا كان $U_2 \le R_2$ فأن المتغير العشوائي سيكون $t_2 = 1$
- اذا كان $U_2 > R_2$ فأن المتغير العشوائي سيكون $t_2 = 0$

أما بالنسبة للمركبة الثانية فسيتم توليد بيانات تتبع التوزيع الأسي [Exponential Distribution]باستخدام طريقة التحويل المعكوس [Inverse TR. Method] وبتعويض دالة التوزيع التجميعية للتوزيع الأسي بصيغة التحويل سينتج :

$$u_3 = 1 - e^{-\lambda t_3}$$

$$t_3 = \frac{-1}{\lambda}\log(1 - u_3) \qquad \dots\dots\dots (35)$$

المرحلة الثالثة :

وهي مرحلة التقدير ، وتتلخص بإيجاد مقدر دالة معولية النظام ، وعلى النحو الآتي :

$$\widehat{R}(t)=\frac{\sum_{L=1}^{q}\widehat{R}_L(t)}{q} \qquad \ldots\ldots\ldots(36)$$

وأن $\widehat{R}(t)$ يمثل مقدر دالة المعولية للنظام بحسب الأسلوب المستخدم في أيجاد المقدر ، وكالآتي :

$MLE\ (t)$: يمثل مقدر الإمكان الأعظم .

$UMVUE\ (t)$: يمثل المقدر المنتظم غير المتحيز ذو أقل تباين .

$RBI\ (t)$: يمثل مقدر بيز القياسي باستخدام دالة احتمالية أولية غير معلوماتية .

$RBG\ (t)$: يمثل مقدر بيز القياسي باستخدام دالة كثافة احتمالية أولية مرافقة طبيعية .

المرحلة الرابعة :

في هذه المرحلة يتم حساب المقياس الإحصائي (MSE) متوسط مربعات الخطأ إلى المقدرات التي تم أيجادها في المرحلة الثالثة .

$$MSE\left(\widehat{R}(t)\right)=\frac{1}{q}\sum_{L=1}^{q}\left(\widehat{R}(t)-R(t)\right)^2 \qquad \ldots\ldots\ldots(37)$$

2-7 نتائج تجارب المحاكاة المتعلقة بالنظام المتسلسل :

سيتم في هذه الفقرة عرض نتائج تجارب المحاكاة وتحليلها لتقدير دالة معولية النظام المتسلسل وبحسب الطرائق المبينة في هذا البحث ، وفيما يأتي النتائج الموضحة في الجداول التي سيتم تحليلها تباعاً وكما يأتي :

جدول (3)

يبين قيم دالة معولية النظام المتسلسل للأنموذج الأول لتجربة عدد مكرراتها (q=1000)

R_2	λ	m	t	REAL VALUE	MLE	UMVUE	RBI	RBG	
								$\lambda_0=2$, $\lambda_1=1$, a=0.01,b=0.02	$\lambda_0=3$, $\lambda_1=2$, a=0.1,b=0.2
0.98	0.1	10	2	0.802356	0.778773	0.795737	0.781363	0.732712	0.731087
			4	0.656913	0.610745	0.633139	0.618315	0.556221	0.544765
			6	0.537835	0.482013	0.503787	0.494638	0.427929	0.411808
			8	0.440342	0.382588	0.400907	0.399443	0.333018	0.315142
			10	0.360521	0.305224	0.319070	0.325239	0.261739	0.243733
		20	2	0.802356	0.794941	0.802845	0.796086	0.771982	0.771511
			4	0.656913	0.636507	0.647205	0.639903	0.608526	0.602720
			6	0.537835	0.512797	0.523597	0.518556	0.484083	0.475378
			8	0.440342	0.415320	0.424892	0.423148	0.388086	0.377988
			10	0.360521	0.337916	0.345691	0.347383	0.313217	0.302656
		30	2	0.802356	0.800518	0.805806	0.801187	0.784947	0.784571
			4	0.656913	0.641521	0.648926	0.643636	0.622052	0.617826
			6	0.537835	0.514664	0.522287	0.518436	0.494376	0.487962
			8	0.440342	0.413349	0.420133	0.418672	0.394009	0.386514
			10	0.360521	0.332349	0.337789	0.338965	0.314882	0.307028
		40	2	0.802356	0.792477	0.796540	0.793024	0.780591	0.780164
			4	0.656913	0.629150	0.634716	0.630858	0.614414	0.611060
			6	0.537835	0.500388	0.505988	0.503392	0.485200	0.480224
			8	0.440342	0.398700	0.403562	0.402885	0.384388	0.378646
			10	0.360521	0.318254	0.322041	0.323389	0.305476	0.299515
		50	2	0.802356	0.803479	0.806612	0.803868	0.794120	0.793916
			4	0.656913	0.646077	0.650490	0.647314	0.634288	0.631719
			6	0.537835	0.519903	0.524478	0.522125	0.507519	0.503564
			8	0.440342	0.418683	0.422790	0.421837	0.406785	0.402113
			10	0.360521	0.337416	0.340747	0.341358	0.326593	0.321651
		100	2	0.802356	0.799740	0.801324	0.799942	0.795003	0.794869
			4	0.656913	0.640197	0.642405	0.640839	0.634242	0.632901
			6	0.537835	0.512962	0.515226	0.514108	0.506726	0.504681
			8	0.440342	0.411390	0.413399	0.413009	0.405423	0.403015
			10	0.360521	0.330224	0.331833	0.332237	0.324821	0.322280

جدول (4)
يبين قيم دالة معولية النظام المتسلسل للأنموذج الثاني لتجربة عدد مكرراتها (q=1000)

R_2	λ	m	t	REAL VALUE	MLE	UMVUE	RBI	RBG $\lambda_0=2$ $\lambda_1=1$ a=0.01,b=0.02	RBG $\lambda_0=3$ $\lambda_1=2$ a=0.1,b=0.2
0.99	0.03	10	2	0.932346	0.930671	0.937076	0.930955	0.900347	0.910260
			4	0.878051	0.867061	0.878394	0.868081	0.828445	0.832225
			6	0.826917	0.808617	0.823655	0.810682	0.763804	0.762575
			8	0.778761	0.754844	0.772582	0.758156	0.705514	0.700202
			10	0.733410	0.705305	0.724916	0.709984	0.652800	0.644169
		20	2	0.932346	0.929555	0.932824	0.929685	0.913995	0.918975
			4	0.878051	0.864346	0.870178	0.864826	0.844273	0.845971
			6	0.826917	0.803964	0.811759	0.804957	0.780389	0.779319
			8	0.778761	0.748034	0.757280	0.749660	0.721811	0.718418
			10	0.733410	0.696211	0.706478	0.698552	0.668059	0.662728
		30	2	0.932346	0.934384	0.936426	0.934458	0.924187	0.927695
			4	0.878051	0.873208	0.876887	0.873483	0.860089	0.861498
			6	0.826917	0.816161	0.821125	0.816734	0.800704	0.800302
			8	0.778761	0.762954	0.768902	0.763901	0.745663	0.743706
			10	0.733410	0.713320	0.719991	0.714695	0.694628	0.691344
		40	2	0.932346	0.937007	0.938483	0.937058	0.929436	0.932145
			4	0.878051	0.878054	0.880725	0.878242	0.868334	0.869508
			6	0.826917	0.822876	0.826498	0.823271	0.811410	0.811247
			8	0.778761	0.771227	0.775589	0.771884	0.758369	0.757045
			10	0.733410	0.722879	0.727797	0.723839	0.708935	0.706609
		50	2	0.932346	0.938376	0.939532	0.938415	0.932351	0.934553
			4	0.878051	0.880621	0.882718	0.880766	0.872900	0.873893
			6	0.826917	0.826488	0.829337	0.826792	0.817379	0.817314
			8	0.778761	0.775745	0.779183	0.776251	0.765521	0.764532
			10	0.733410	0.728176	0.732060	0.728916	0.717073	0.715283
		100	2	0.932346	0.939369	0.939938	0.939388	0.936362	0.937479
			4	0.878051	0.882455	0.883489	0.882524	0.878603	0.879120
			6	0.826917	0.829025	0.830433	0.829172	0.824477	0.824466
			8	0.778761	0.778866	0.780568	0.779111	0.773753	0.773277
			10	0.733410	0.731774	0.733701	0.732133	0.726211	0.725330

جدول (5)

يبين قيم دالة معولية النظام المتسلسل للأنموذج الثالث لتجربة عدد مكرراتها(q=1000)

R_2	λ	m	t	REAL VALUE	MLE	UMVUE	RBI	RBG	
								$\lambda_0 = 2$ $\lambda_1 = 1$ a=0.01,b=0.02	$\lambda_0 = 3$ $\lambda_1 = 2$ a=0.1,b=0.2
0.998	0.004	10	2	0.990047	0.989604	0.990633	0.989610	0.968378	0.984565
			4	0.982159	0.979329	0.981353	0.979352	0.956356	0.971340
			6	0.974333	0.969171	0.972158	0.969223	0.944511	0.958325
			8	0.966569	0.959129	0.963048	0.959220	0.932842	0.945516
			10	0.958867	0.949202	0.954022	0.949343	0.921344	0.932911
		20	2	0.990047	0.990594	0.991060	0.990597	0.979914	0.988212
			4	0.982159	0.981282	0.982201	0.981292	0.969796	0.977551
			6	0.974333	0.972062	0.973420	0.972083	0.959794	0.967016
			8	0.966569	0.962934	0.964718	0.962970	0.949905	0.956606
			10	0.958867	0.953895	0.956093	0.953951	0.940128	0.946318
		30	2	0.990047	0.990903	0.991203	0.990904	0.983766	0.989343
			4	0.982159	0.981890	0.982483	0.981895	0.974230	0.979457
			6	0.974333	0.972960	0.973837	0.972972	0.964791	0.969673
			8	0.966569	0.964112	0.965266	0.964134	0.955447	0.959992
			10	0.958867	0.955346	0.956768	0.955379	0.946197	0.950411
		40	2	0.990047	0.991083	0.991304	0.991084	0.985725	0.989926
			4	0.982159	0.982250	0.982686	0.982254	0.976508	0.980451
			6	0.974333	0.973500	0.974145	0.973509	0.967383	0.971074
			8	0.966569	0.964832	0.965679	0.964848	0.958349	0.961792
			10	0.958867	0.956244	0.957289	0.956269	0.949406	0.952606
		50	2	0.990047	0.991244	0.991417	0.991244	0.986957	0.990327
			4	0.982159	0.982565	0.982908	0.982568	0.977975	0.981143
			6	0.974333	0.973963	0.974470	0.973970	0.969077	0.972046
			8	0.966569	0.965437	0.966105	0.965449	0.960262	0.963036
			10	0.958867	0.956987	0.957810	0.957006	0.951530	0.954112
		100	2	0.990047	0.991535	0.991619	0.991535	0.989390	0.991085
			4	0.982159	0.983143	0.983309	0.983145	0.980851	0.982448
			6	0.974333	0.974824	0.975069	0.974827	0.972389	0.973889
			8	0.966569	0.966576	0.966899	0.966582	0.964001	0.965407
			10	0.958867	0.958400	0.958798	0.958409	0.955687	0.957001

جدول (6)

يبين قيم (MSE) لدالة معولية النظام المتسلسل للأنموذج الأول لتجربة عدد مكرراتها (q=1000)

R_2	λ	m	t	MLE	UMVUE	RBI	RBG		BEST
							$\lambda_0 = 2$ $\lambda_1 = 1$ a=0.01,b=0.02	$\lambda_0 = 3$ $\lambda_1 = 2$ a=0.1,b=0.2	
0.98	0.1	10	2	0.004813	0.003890	0.004496	0.009633	0.010335	UMVUE
			4	0.011710	0.010037	0.010354	0.019646	0.022611	UMVUE
			6	0.015392	0.014206	0.013082	0.023087	0.027065	RBI
			8	0.015921	0.015685	0.013181	0.021909	0.025855	RBI
			10	0.014537	0.015114	0.011870	0.018624	0.022033	RBI
		20	2	0.004630	0.004365	0.004502	0.005793	0.006090	UMVUE
			4	0.010594	0.010226	0.010083	0.012538	0.013483	RBI
			6	0.013710	0.013639	0.012896	0.015391	0.016598	RBI
			8	0.014267	0.014559	0.013367	0.015292	0.016438	RBI
			10	0.013325	0.013874	0.012519	0.013698	0.014626	RBI
		30	2	6.94E-04	6.75E-04	6.83E-04	1.04E-03	1.09E-03	UMVUE
			4	0.002037	0.001834	0.001937	0.003063	0.003441	UMVUE
			6	0.003181	0.002897	0.002947	0.004518	0.005176	UMVUE
			8	0.003805	0.003553	0.003450	0.005119	0.005902	RBI
			10	0.003947	0.003787	0.003518	0.005052	0.005828	RBI
		40	2	0.001228	0.001131	0.001206	0.001656	0.001716	UMVUE

			4	0.003641	0.003333	0.003500	0.004725	0.005095	UMVUE
			6	0.005513	0.005149	0.005207	0.006846	0.007459	UMVUE
			8	0.006397	0.006106	0.005955	0.007652	0.008356	RBI
			10	0.006447	0.006284	0.005930	0.007461	0.008139	RBI
		50	2	4.99E-04	5.04E-04	4.96E-04	5.84E-04	6.02E-04	RBI
			4	0.001385	0.001298	0.001342	0.001797	0.001947	UMVUE
			6	0.002140	0.002006	0.002034	0.002726	0.003005	UMVUE
			8	0.002533	0.002405	0.002367	0.003140	0.003486	RBI
			10	0.002595	0.002504	0.002389	0.003130	0.003485	RBI
		100	2	6.19E-04	6.07E-04	6.16E-04	6.78E-04	6.89E-04	UMVUE
			4	0.001816	0.001742	0.001784	0.002061	0.002139	UMVUE
			6	0.002791	0.002690	0.002716	0.003131	0.003276	UMVUE
			8	0.003267	0.003175	0.003152	0.003616	0.003795	RBI
			10	0.003309	0.003245	0.003168	0.003614	0.003799	RBI

جدول (7)

يبين قيم (MSE) لدالة معولية النظام المتسلسل للأنموذج الثاني لتجربة عدد مكرراتها (q=1000)

R_2	λ	m	t	MLE	UMVUE	RBI	RBG		BEST
							$\lambda_0 = 2$ $\lambda_1 = 1$ a=0.01,b=0.02	$\lambda_0 = 3$ $\lambda_1 = 2$ a=0.1,b=0.2	
0.99	0.03	10	2	9.14E-04	7.78E-04	8.98E-04	2.20E-03	1.87E-03	UMVUE
			4	3.17E-03	2.64E-03	3.05E-03	6.21E-03	6.44E-03	UMVUE
			6	6.08E-03	5.15E-03	5.76E-03	0.010748	0.011847	UMVUE
			8	9.15E-03	7.96E-03	8.54E-03	0.015054	0.017050	UMVUE
			10	0.012065	0.010739	0.011125	0.018755	0.021537	UMVUE
		20	2	2.81E-04	2.50E-04	2.78E-04	6.51E-04	5.23E-04	UMVUE
			4	1.31E-03	9.35E-04	1.10E-03	2.20E-03	2.18E-03	UMVUE
			6	2.35E-03	1.94E-03	2.27E-03	4.18E-03	4.44E-03	UMVUE
			8	3.73E-03	3.11E-03	3.56E-03	6.26E-03	6.88E-03	UMVUE
			10	5.13E-03	4.35E-03	4.86E-03	8.26E-03	9.25E-03	UMVUE
		30	2	1.38E-04	1.43E-04	1.38E-04	2.14E-04	1.79E-04	MLE,RBI
			4	4.84E-04	4.41E-04	4.77E-04	8.23E-04	8.04E-04	UMVUE
			6	1.01E-03	8.89E-04	9.82E-04	1.64E-03	1.71E-03	UMVUE
			8	1.60E-03	1.42E-03	1.56E-03	2.53E-03	2.74E-03	UMVUE
			10	2.23E-03	1.97E-03	2.13E-03	3.41E-03	3.76E-03	UMVUE
		40	2	9.21E-05	1.05E-04	9.23E-05	8.43E-05	7.98E-05	RBG
			4	2.48E-04	2.46E-04	2.47E-04	3.59E-04	3.51E-04	UMVUE
			6	5.09E-04	4.77E-04	5.02E-04	7.63E-04	7.91E-04	UMVUE
			8	8.31E-04	7.63E-04	8.13E-04	1.23E-03	1.32E-03	UMVUE
			10	1.18E-03	1.08E-03	1.15E-03	1.71E-03	1.87E-03	UMVUE
		50	2	1.08E-04	1.20E-04	1.08E-04	7.57E-05	8.37E-04	RBG
			4	2.57E-04	2.65E-04	2.57E-04	2.91E-04	2.92E-04	MLE,RBI
			6	4.96E-04	4.94E-04	4.93E-04	6.10E-04	6.30E-04	RBI
			8	7.85E-04	7.59E-04	7.75E-04	9.82E-04	1.04E-03	UMVUE
			10	1.09E-03	1.05E-03	1.07E-03	1.37E-03	1.46E-03	UMVUE
		100	2	8.88 E-05	9.64E-05	8.90E-05	5.68E-05	6.79E-05	RBG
			4	1.58E-04	1.17E-04	1.58E-04	1.43E-04	1.47E-04	UMVUE
			6	2.81E-04	2.85E-04	2.80E-04	2.89E-04	2.94E-04	RBI
			8	4.33E-04	4.32E-04	4.31E-04	4.69E-04	4.79E-04	RBI
			10	5.99E-04	5.92E-04	5.95E-04	6.59E-04	6.82E-04	UMVUE

جدول (8)

يبين قيم (MSE) لدالة معولية النظام المتسلسل للأنموذج الثالث لتجربة عدد مكرراتها(q=1000)

R_2	λ	m	t	MLE	UMVUE	RBI	RBG $\lambda_0 = 2$ $\lambda_1 = 1$ a=0.01,b=0.02	RBG $\lambda_0 = 3$ $\lambda_1 = 2$ a=0.1,b=0.2	BEST
0.998	0.004	10	2	1.14E-05	9.45E-06	1.14E-05	4.85E-04	4.86E-05	UMVUE
			4	5.17E-05	3.64E-05	5.13E-05	7.25E-04	1.89E-04	UMVUE
			6	1.23E-04	8.35E-05	1.21E-04	1.02E-03	4.12E-04	UMVUE
			8	2.22E-04	1.49E-04	2.19E-04	1.36E-03	7.11E-04	UMVUE
			10	3.47E-04	2.39E-04	3.41E-04	1.75E-03	1.08E-03	UMVUE
		20	2	4.98E-06	5.26E-06	4.97E-06	1.08E-04	9.51E-06	RBI
			4	1.91E-05	1.66E-05	1.91E-05	1.74E-04	4.52E-05	MLE,RBI
			6	4.56E-05	3.76E-05	4.54E-05	2.59E-04	1.06E-04	UMVUE
			8	8.37E-05	6.75E-05	8.32E-05	3.60E-04	1.91E-04	UMVUE
			10	1.33E-04	1.06E-04	1.32E-04	4.77E-04	2.97E-04	UMVUE
		30	2	1.73E-06	2.27E-06	1.73E-06	4.06E-05	1.69E-06	RBG
			4	3.99E-06	3.78E-06	3.99E-06	6.73E-05	1.20E-05	UMVUE
			6	1.06E-05	8.38E-06	1.51E-05	1.01E-04	3.21E-05	UMVUE
			8	2.12E-05	1.59E-05	2.10E-05	1.41E-04	6.13E-05	UMVUE
			10	3.56E-05	2.62E-05	3.53E-05	1.86E-04	9.92E-05	UMVUE
		40	2	5.00E-06	5.32E-06	5.00E-06	2.29E-05	4.54E-06	RBG
			4	1.54E-05	1.49E-05	1.54E-05	4.87E-05	2.06E-05	UMVUE
			6	3.46E-05	3.24E-05	3.46E-05	8.52E-05	4.95E-05	UMVUE
			8	6.21E-05	5.72E-05	6.19E-05	1.32E-04	9.04E-05	UMVUE
			10	9.73E-05	8.89E-05	9.69E-05	1.87E-04	1.42E-04	UMVUE
		50	2	2.17E-06	2.59E-06	2.17E-06	1.03E-05	9.07E-07	RBG
			4	3.07E-06	3.36E-06	3.07E-06	2.06E-05	4.29E-06	MLE,RBI
			6	6.57E-06	6.21E-06	6.55E-06	3.45E-05	1.24E-05	UMVUE
			8	1.25E-05	1.10E-05	1.25E-05	5.18E-05	2.50E-05	UMVUE
			10	2.08E-05	1.77E-05	2.07E-05	7.22E-05	4.18E-05	UMVUE
		100	2	3.57E-06	3.81E-06	3.58E-06	1.84E-06	2.52E-06	RBG
			4	6.32E-06	6.57E-06	6.32E-06	7.25E-06	5.75E-06	RBG
			6	1.21E-05	1.21E-05	1.21E-05	1.60E-05	1.27E-05	MLE,RBI,UMVUE
			8	2.06E-05	2.04E-05	2.06E-05	2.79E-05	2.31E-05	UMVUE
			10	3.19E-05	3.11E-05	3.18E-05	4.28E-05	3.69E-05	UMVUE

تحليل نتائج المحاكاة للنظام المتسلسل

- تبين من نتائج تجارب المحاكاة المقدمة في الجداول (3) و (4) و(5) الخاصة بتقدير دالة معولية النظام $[R(t)]$ أن تقديرات دالة المعولية قد أظهرت متوسطات قريبة الى القيم الحقيقية (الافتراضية) لدالة معولية النظام المتسلسل ولكل النماذج وأحجام العينات وقيم الوقت المفترضة (t) ، وكذلك أن متوسطات تقديرات المعولية بالطرائق الكلاسيكية والطرائق البيزية كافة قد اقتربت من القيم الحقيقية لهذه الدالة وبزيادة حجم العينة مع ملاحظة أن قيم دالة معولية النظام قد تناقصت بزيادة الوقت المفترض ، وهذا ما يتفق مع الخصائص الإحصائية لدالة معولية النظام حيث تكون قيم دالة المعولية الحقيقية رتيبة ، متناقصة بزيادة الزمن t مما يؤكد ويحقق صحة الجانب النظري من البحث حول سلوك هذه الدالة .
- تبين من نتائج تجارب المحاكاة المقدمة في الجداول (6) و(7) و(8) الخاصة بالمقياس الإحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) ، ما يأتي :-
- للأنموذج الأول كانت الأفضلية لمقدر بيز القياسي باستخدام دالة احتمالية أولية غير معلوماتية ثم يليه في المرتبة الثانية المقدر المنتظم غير المتحيز ذو أقل تباين مقارنة ببقية المقدرات من حيث عدد مرات الأفضلية .
- للأنموذج الثاني كانت الأفضلية للمقدر المنتظم غير المتحيز ذو أقل تباين يليه في المرتبة الثانية مقدر بيز القياسي باستخدام دالة احتمالية أولية غير معلوماتية ثم جاء بالمرتبة الثالثة مقدر بيز القياسي باستخدام دالة كثافة احتمالية أولية مرافقة طبيعية ثم يليه بالمرتبة الرابعة مقدر الإمكان الأعظم مقارنة ببقية المقدرات من حيث عدد مرات الأفضلية.
- للأنموذج الثالث كانت الأفضلية للمقدر المنتظم غير المتحيز ذو أقل تباين ثم يليه بالمرتبة الثانية مقدر بيز القياسي باستخدام دالة كثافة احتمالية أولية مرافقة طبيعية ثم جاء بالمرتبة الثالثة المقدرين (مقدر بيز القياسي باستخدام دالة احتمالية أولية غير معلوماتية ومقدر الإمكان الأعظم) من حيث تساوي عدد مرات الأفضلية لكل منهما مقارنة ببقية المقدرات .

8- الاستنتاجات Conclusions

1- بشكل عام وضمن نتائج تجارب المحاكاة كافة وبمختلف حجوم العينات ، تبين أن افضل طريقة لتقدير دالة المعولية للنظام المتسلسل (Series System) هي طريقة المقدر المنتظم غير المتحيز ذو أقل تباين مقارنة ببقية المقدرات ذلك بالاعتماد على المقياس الإحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) .
2- بزيادة حجم العينة تبدأ قيم مقدر بيز القياسي باستخدام دالة كثافة احتمالية اولية غير معلوماتية من الاقتراب من قيم مقدر بيز القياسي باستخدام دالة كثافة احتمالية اولية مرافقة طبيعية لدالة معولية النظام المتسلسل .
3- أظهرت نتائج تجارب المحاكاة بأن قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) تتناقص بزيادة حجم العينة ولجميع المقدرات للنظام المتسلسل وهذا ما ينسجم تماماً مع النظرية الإحصائية .
4- تبين من نتائج تجارب المحاكاة كافة ، أن قيم دالة المعولية الحقيقية والمقدرة للنظام المتسلسل تتناقص بزيادة الزمن t وهي على الدوام تقع ضمن الفترة $[0, 1]$ وهذا ما يؤكد صحة الجانب النظري من البحث حول سلوك هذه الدالة .
5- كانت النتائج متقاربة بين اسلوب بيز القياسي باستخدام دالة كثافة احتمالية اولية غير معلوماتية وطريقة المقدر المنتظم غير المتحيز ذو أقل تباين كما في النموذج الأول للنظام المتسلسل .
6- كانت النتائج متقاربة بين اسلوب بيز القياسي باستخدام دالة كثافة احتمالية أولية غير معلوماتية وأسلوب بيز القياسي باستخدام دالة كثافة احتمالية اولية مرافقة طبيعية كما في النموذج الثالث للنظام المتسلسل .
7- كانت النتائج متقاربة بين أساليب التقدير في حالة حجوم العينات الكبيرة ولكافة النماذج للنظام المتسلسل ، وهذا ما يتطابق تماماً مع النظرية الإحصائية .
8- بالاعتماد على نتائج تجارب المحاكاة، نلاحظ بزيادة الزمن (t) تبدأ قيم دالة معولية النظام المتسلسل بالانخفاض تدريجياً تقابلها زيادة في قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) ، عندما تزداد قيم المعالم الفوقية $[a_1, b_1, \lambda_{00}, \lambda_{11}]$لمقدر بيز القياسي باستخدام دالة كثافة احتمالية اولية مرافقة طبيعية ولكافة احجام العينات للنظام المتسلسل كما في النموذج الثاني، حيث ترى الباحثة من المحتمل ان كمية المعلومات التي تحملها المعلمات الفوقية عن المعلمات العشوائية قد تحمل قدراً من الخطأ العشوائي الذي بدوره قد تزداد قيمته بمرور الزمن .
9- للأنموذج الاول $[\lambda = 0.1, R_2(t) = 0.98]$ للنظام المتسلسل نلاحظ انه بزيادة قيم المعالم الفوقية $[a_1 = 0.1, b_1 = 0.2, \lambda_{00} = 3, \lambda_{11} = 2]$ تقل قيمة دالة المعولية وتزداد قيمة متوسط مربعات الخطأ (MSE) لمقدر بيز القياسي باستخدام دالة كثافة احتمالية اولية مرافقة طبيعة ولكافة احجام العينات والعكس صحيح.
10- بزيادة قيم المعالم الفوقية $[a_1 = 0.1, b_1 = 0.2, \lambda_{00} = 3, \lambda_{11} = 2]$ للأنموذج الثالث نلاحظ بأن قيم المعولية تزداد وتقل قيم متوسط مربعات الخطأ لمقدر بيز القياسي باستخدام دالة كثافة احتمالية اولية مرافقة طبيعية ولكافة احجام العينات للنظام المتسلسل والعكس صحيح .

المصادر

أولاً : المصادر العربية

1- السراي ، علي حميد يوسف (2011) " مقارنة بين اسلوب بيز وطريقة الإمكان الأعظم لتقدير دالة المعولية للنظام المتسلسل والنظام المتوازي مع تطبيق عملي " ، رسالة ماجستير ، كلية الإدارة والاقتصاد ، جامعة بغداد .
2- كوركيس ، بروين أيشا (2006) " بناء أنموذج محاكاة لإيجاد معولية منظومة قدرة كهربائية " رسالة ماجستير في بحوث العمليات ، كلية الإدارة والاقتصاد ، جامعة بغداد.

ثانياً : المصادر الأجنبية :

3- Guo.J& Wilson A.G (2013) " Bayesian Methods for Estimating System Reliability using Heterogeneous Multilevel Information " , Technometrics ,55:4, PP(461-472) .
4- Guo J. & Wilson A.G (2010) ," Bayesian Methods for Estimating the Reliability of Complex Systems using Heterogeneous Multilevel Information " , Iowa state University
5- Harver ,J.L. (2003) " Introduction of Logistic Regression " , Int .
6- Sinha , S.K. And Kale , B.K. (1980) , " Life Testing And Reliability Estimation " , Wiley Eastern Limited .

....
....
....