

مقارنة بعض طرائق تقدير دالة المعولية للتوزيع الأسّي ذو معلمتين وللنظامين المتسلسل والمتوازي

رفل ليث طاهر / باحثة rafallaithtaherr@gmail.com
أ.م.د حسام عبدالرزاق رشيد / الجامعة المستنصرية/ كلية الادارة والاقتصاد husamstat@gmail.com

P: ISSN : 1813-6729

<http://doi.org/10.31272/JAE.45.2022.133.17>

E : ISSN : 2707-1359

مقبول للنشر بتاريخ : 2021/2/7

تاريخ أستلام البحث : 2022/1/19

المستخلص:-

أستخدامت بعض الطرائق الأحصائية لتقدير معلمة الأزاحة (shifting) ومعلمة القياس (scale) للتوزيع الأسّي ذو معلمتين وللنظامين المتسلسل والمتوازي ، ومن هذه الطرائق التي أستخدمت للتقدير والمقارنة هي طريقة الأماكن الأعظم (Maximum likelihood (MEL)) وطريقة بيز القياسية (Standard Bayes (BMS). حيث تمت المقارنة بين هذه الطرائق بأستخدام المقياس الأحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) ولقد تم التوصل من خلال تجارب المحاكاة أن أفضل طريقة لتقدير المعلمات للتوزيع الأسّي ذو معلمتين ولتقدير دالة المعولية ودالة المعولية للنظام المتسلسل (المتوالي) و دالة المعولية للنظام المتوازي هي طريقة بيز القياسية (BMS)



مجلة الادارة والاقتصاد
العدد 133 / حزيران / 2022
الصفحات : 215 - 234

* بحث مسنل من رسالة ماجستير

1 - المقدمة :-

أن الأهتمام بدراسة المعولية (Reliability) ظهر في بداية العقد الأول من القرن العشرين وخصوصاً في عام 1940 م حيث كانت هذه السنة نقطة التحول المحورية في دراسة المعولية. لأن البحوث قبل هذه السنة كانت تقتصر على السيطرة النوعية وصيانة الماكائن ولم تشخص المعولية على أنها حقل مهم ، ولكن بعد هذه السنة ظهر الأهتمام المتزايد في البحوث أدى الى تطور مميز في الأساليب الأحصائية والرياضيات العامة وخصوصاً المعولية ، وبدأ استخدام هذه الدالة في الكثير من الأنظمة لأن الحياة بدأت بالتطور السريع وزادت التعقيدات الميكانيكية والألكترونية في المعدات . حيث تم استعمال دالة المعولية في العديد من المجالات ومنها الصناعية والميكانيكية والألكترونية وقد تم استخدامها في المعدات والعتاد الحربي والملاحه البحريه والسيارات والقطارات وفي الأنظمة المعقدة كمسرعات خطية في أجهزة الطائرات وكدعائم في الهندسة الميكانيكية . ونظراً للتطور الكبير والمميز الذي حدث في التكنولوجيا فقد تم استعمالها في الحفاظ على حياة الكائنات الحية وذلك من خلال زيادة كفاءة الأجهزة الطبية. حيث تم استعمال في الأجهزة الطبية نظرية البقاء Survival Theory)) ونظرية المعولية (Reliability Theory) التي تهتم بطريقة غير مباشرة بالأهتمام بدراسة العمر الزمني (life time) للكائنات الحية حيث تم استعماله في التأمين على حياة الإنسان مقابل مبلغ معين من المال ، وأستخدمت في (الماكائن والمعدات والأجهزة الكهربائية والمنتجات التجارية) . وفي عام 1960م تم استخدام الأنظمة المعقدة للمعولية في السفن الفضائية لوكالة ناسا (NASA) وكذلك في الصواريخ الذكية حيث الهدف من المعولية هو معرفة مدى قدرة الجهاز على الأنجاز عندما تكون الكلف مسيطر عليها.

وفي دراسة دالة المعولية أهمية كبيرة للأنظمة حيث تعد الأنظمة جزء من الماكائن والأجهزة. ويعرف النظام (the-system) بأنه عبارة عن مجموعة من المركبات التي تتجزء لتنجز أعمال مختلفة لغرض الحصول على خدمة معينة أو منتج معين.

ومن أنواع الأنظمة النظام المتسلسل / المتوالي (sequential system serial/) والنظام المتوازي (parallel system) والنظام الهجين (hybrid system) وأن التطور الكبير والمميز والاستعمالات الواسعة لدالة المعولية أدى ذلك الى أهتمام أصحاب الشركات المنتجة للأجهزة والماكائن والمعدات الى تطوير الأجهزة بحيث يتم الحصول على أجهزة خالية أو شبه خالية من الأعطاب التي تحدث في الماكائن لبيان مدى كفاءتها وقدرتها على العمل من دون عطلات لمدة زمنية طويلة وبهذا يعطي القدرة على تقييم الماكائن والمعدات لوضع خطط التطوير مستقبلاً ، وتحديد أوقات الصيانة ودراسة أسباب التوقف ، لأن هذا التوقف يعد عائقاً للإنتاج ويكبد الشركة خسائر مادية وضياح الوقت وتكاليف التصليح وكذلك خسارة الزبائن بسبب عدم تسليم الطلبات بالآوقات المحدودة مما يؤدي الى خسارة سمعة الشركة التي تعد من أهم مقومات النجاح والاستمرار .

الدراسات السابقة .

2- طريقة الأماكن الأعظم [35][33][29][20]

Maximum Likelihood Estimator

طريقة الأماكن الأعظم يرمز لها اختصاراً (MLE) وهي إحدى طرائق التقدير المهمة وفي عام (1920) م تم اقتراحها أول مره من قبل العالم (Fisher)) وتهدف هذه الطريقة الى تعظيم الدالة الى نهايتها العظمى حيث تتميز مقدرات بانها مقدرات جيدة وكفؤة وتتميز بخاصية الثبات ومتسقة وغير متحيزة عندما يكون حجم العينة كبيرة وأمتلاكها أقل تباين ممكن (Sufficient) ووحيدة (Unique) . ولتقدير عينة عشوائية تتوزع توزيع أسّي بمعلمتين حيث (θ) تمثل معلمة القياس وتكون $(\theta > 0)$ والمعلمه (η) تمثل معلمة الأزاحة اذا أن $(\eta > 0)$ وللحصول على مقدر الأماكن الأعظم الذي يجعل الدالة في نهايتها العظمى.

تعظيم الدالة التوزيع الأسّي ذو معلمتين.

$$L(t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_n, \theta, \eta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \exp \left[-\frac{(t_i - \eta)}{\theta} \right]$$

$$L(t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_n, \theta, \eta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \exp \left[-\sum_{i=1}^n (t_i - \eta) / \theta \right] \quad \dots (1)$$

حيث أن $i=1, 2, 3, \dots, n$ $t_i > \eta$

وباخذ Ln للطرفين نحصل على.

$$\ln L = n [\ln (1) - \ln (\theta)] - \sum_{i=1}^n [(t_i - \eta) / \theta] \quad \dots (2)$$

$$\ln L = -n \ln(\theta) - \sum_{i=1}^n [(t_i - \eta)/\theta]$$

نشتق بالنسبة للمعلمة الأزاحة η نحصل على.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \eta} = \frac{n}{\theta}$$

3))...

ومساواة المشتقة للصفر نحصل على.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \eta} = 0$$

... (4)

لذلك نلجأ الى استخدام أسلوب التعريف (using definition) وذلك بسبب عدم الحصول على صيغة مفيدة. وللحصول على قيمة المعلمة الأزاحة η التي تعظم دالة الأمكان الأعظم .

$$\text{Max} L \leftrightarrow \text{Min} \sum_{i=1}^n (t_i - \eta) / \theta \quad \dots (5)$$

$$\sum_{i=1}^n (t_i - \eta) / \theta$$

حيث معلمة الأزاحة (η) هي التي تعظم الدالة وتجعل المقدّر وإذا رتبنا القيم تصاعدياً $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ فإن $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n < \infty$ و $\eta < t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ وليصبح المقدّر

$$\sum_{i=1}^t (t_i - \eta) / \theta$$

أقل ما يمكن سوف نأخذ η أكبر ما يمكن .
($t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$) و هي تمثل أحصاءات مرتبة.

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$\hat{\eta} = \min(t_i) = t_1$$

... (6)

(التي حصلنا عليها . نعوّض معلمة الأزاحة) التي تعظم الدالة (L) والحصول على قيمة

$$L = \frac{1}{(\theta)^n} \exp[-\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)/\theta]$$

7)) ...

نشتق بالنسبة لمعلمة القياس (θ) للحصول على L ثم نساوي المشتقه بالصفر نحصل على.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)}{\theta^2} \quad \dots (8)$$

نساوي المشتقه للصفر نحصل على.

$$\text{let } \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0 \quad \dots (9)$$

$$\hat{\theta}_{MLE} = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)}{n} \quad \dots (10)$$

حيث المقدّر معلمة القياس θ سيكون .

$$\hat{\theta}_{MLE} = \bar{t} - t_1$$

... (11)

ونحصل على المقدّر معلمة الأزاحة . η

12))...

$$\hat{\eta}_{MLE} = t_1$$

حيث مقدّر دالة المعولية للتوزيع الأسّي ذو معلمتين .

$$\hat{R}_{MLE}(t) = \exp [-(t - \hat{\eta}_{MLE}) / \hat{\theta}_{MLE}] \quad \dots (13)$$

معولية النظام المتوازي للتوزيع الأسّي ذو معلمتين .

$$R_{Sp}(t) = 1 - (1 - e^{-(t - \hat{\eta}_{MLE}) / \hat{\theta}_{MLE}})^k \quad \dots (14)$$

معولية النظام المتوالي (المتسلسل) للتوزيع الأسّي ذو معلمتين.

$$R_S(t) = [e^{-(t - \hat{\eta}_{MLE}) / \hat{\theta}_{MLE}}]^k \quad \dots (15)$$

3- طريقة بيز القياسية

Standard Bayes

هي إحدى الطرائق التقديرية ظهرت في عام (1702) م حيث تم اقتراحها من قبل العالم (Thomas Bayes) حيث أطلق عليها بهذا الاسم (Bayes) نسبة إلى عالمها وللحصول على تقديرات نفرض أن المعلومات بأنها عبارة عن متغيرات عشوائية و يجب الحصول على معلومات عن الظاهرة المدروسة سابقاً وذلك للحصول على تقديرات المراده حيث يتم ترتيب وصياغة المعلومات على شكل توزيع احتمالي سابق (Prior distribution).

حيث يوجد أنواع من التوزيعات السابقة التي تقسم إلى .

- 1- التوزيع الحد الأقصى للنظرية للمعلومات: يعتبر هذا التوزيع أن الخصائص تكون معروفة وذلك بالاعتماد على نظرية المعلومات (information) حيث يتم اختيار التوزيع السابق حسب خصائص المعلومات المتوفرة لدينا.
 - 2- التوزيع المرافق: يتم العمل بهذا التوزيع وعندما تكون التجارب التي يتم العمل عليها صغيرة حيث يكون التوزيع اللاحق من نفس عائلة التوزيع الاحتمالي مثل توزيع (Normal).
 - 3- التوزيع الموضوعي هذا التوزيع هو الأفضل لغير الاحصائيين وذلك لأنه يجعل تحليل بيز أسهل تطبيقاً وبالإضافة لاستخدامه أنحراف كوبلاك ليبلر.
 - 4- التوزيع السابق يتم العمل بهذا التوزيع عندما تكون المعلومات غير متوفرة عن الظاهرة التي يراد العمل عليها حيث يتم استخدامه مع دالة الغير معلوماتية.
- والمعيب في طريقة بيز هو صعوبة تحديد التوزيع السابق بصورة دقيقة وذلك لصعوبة الحصول على معلومات

و بالإضافة إلى ذلك يوجد أنواع من دوال الكثافة الاحتمالية حيث على الأساس تقسم إلى أنواع وهي.

1- دالة المعلوماتية

Information Function

يتم العمل بدالة المعلوماتية في حالة التي تتوفر معلومات كافية وسابقة عن المعلمة التي يراد تقديرها حيث أن المعلمة في هذه الحالة تكون مقيدة ومحدودة وذلك حسب المعلومات المتوفرة وفي بعض الأحيان يقوم الباحث بوضع قيود على المعلمة التي يراد تقديرها ويكون معتمداً على المعلومات المتوفرة عن المعلمة حيث تكون في هذه الحالة القيود مهمة لصياغة دالة الكثافة الاحتمالية الأولية ، وأن هذه الدالة تشابه إلى حد كبير مع دالة غير معلوماتية وذلك من حيث تطبيق قاعدة (Jeffrey) والتي تهدف هذه القاعدة إلى الحصول على أفضل مقدر للتوزيع الأولي لأن التوزيع الأولي صاحب السلطة الأقوى في تحديد شكل المعلمة المقدر مقارنة مع دالة الأماكن الأعظم .

2- دالة غير معلوماتية Non Information Function

يتم العمل بهذه الدالة في الحالة لايتوفر أي معلومات عن المعلمة التي يراد تقديرها أو تكون المعلومات غير كافية ، حيث وضع هنا العالم (Jeffrey) قاعدتين تعتمد على مجال الدالة حيث يتم من خلالها تحديد دالة الكثافة الأولية المناسبة.

حيث القاعدة الأولى تستند إذا كانت المعلمة المراد تقديرها تمتلك مجال لانهائي حيث تمثل الفترة $(-\infty, \infty)$ فدالة الكثافة الاحتمالية الأولى تكون دالة لتوزيع منتظم.

والقاعدة الثانية تستند على إذا كان المجال ضمن القيم الموجبة أي يعني مجال الدالة المراد تقديرها يقع بين فترة $(0, \infty)$ فان دالة الكثافة الاحتمالية تستعمل توزيع لو غارتمى منتظم .

3- أولية المرافقة للطبيعة Normal Conjugate prior

تعد هذه الدالة إحدى الدوال الكثافة الاحتمالية حيث يتم استخدامها بكثرة وذلك لأنها تمتلك العديد من الصفات الجيدة وممتازة التي تميزها عن باقي الدوال الاحتمالية الأخرى حيث تكون المعلومات واضحة ومحدودة ومحددة وتكون أكثر ملائمة حيث تبني دالة الكثافة الاحتمالية بالاعتماد على دالة (MLE) للمشاهدات العينة الحالية حيث يفضل استخدام هذا النوع في الكثير من الأحيان بدلاً عن دالة الكثافة غير المعلوماتية وتستعمل هذه الدالة في الدوال الخطية حيث تعالج مشكلة التعداد الخطي ومن أشهر الدوال الخطية المرافقة للطبيعة هي دالة الأولية Gamma و Normal .

4- المعتمدة على عينة سابقة Dependent on the previous sample

تتميز هذه الدالة بمعلوماتها المراد تقديرها حيث تمتلك معلومات وتكون هذه المعلومات قليلة (غير كافية) حيث يتم الحصول على المعلومات الإضافية وذلك من خلال التجارب الحالية (التي يتم العمل عليها) ومن خلال التجارب السنين السابقة حيث تكون لدينا مجموعتان من البيانات . المجموعة البيانات الأولى تتميز بأنها تمتلك توزيع احتمالي أولي غير معلوماتي حيث يتم دمجها مع دالة (MLE) للعينة الأولى للحصول على

مقارنة بعض طرائق تقدير دالة العسولية للتوزيع الأسى ذو معلمتين والنظامين المتسلسل والمتوازي

التوزيع اللاحق وفي هذه الحالة يتم استعمال التوزيع الذي تم الحصول عليه من العينة الأولى للبيانات كتوزيع أولي للعينة الثانية وبعد ذلك يتم العمل بالمعلومات التي تم الحصول عليها من خلال التجربة العلمية التي تكون تحت الدراسة وتكون بدلالة صيغة (MLE) وذلك للحصول على المقدرات المعلمات المراد تقديرها. ولأشتقاق طريقة بيز القياسية

حيث هنا سوف نستخدم أسلوب للدالة الاحتمالية الأولية غير معلومة التي تكون مجهولة بالنسبة للمعلمتين التوزيع الأسى (θ, η) وذلك لعدم وجود معلومات سابقة ومتاحة عن المعلمة المطلوبة.

$$\frac{1}{(\theta)^p} \quad 0 < \eta < \infty \quad 0 < \theta \leq (\theta, \eta) \rho$$

$$P=1, 2, 3, \dots, n$$

$\rho(\theta, \eta)$: دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة.

حيث t يمثل العينة العشوائية التي تكون بحجم n من المتغيرات العشوائية للتوزيع الأسى ذو معلمتين (θ, η) حيث دالة الأماكن الأعظم للتوزيع تكون حسب الصيغة الآتية.

$$L(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n / \theta, \eta) = \prod_{i=1}^n f(t_i / \theta, \eta) \\ = \frac{1}{(\theta)^n} \exp \exp \left[- \sum_{i=1}^n (t_i - \eta) / \theta \right]$$

وللحصول على التوزيع اللاحق نستخدم صيغة بيز العكسية للتوزيع الأسى ذو معلمتين (θ, η) ، حيث أن (C) ي مثل ثابت التناسب للموجب للتوزيع وأن $f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$ يمثل مقلوب دالة الكثافة الحدية.

$$\iint L(t_1, t_2, \dots, t_n / \theta, \eta) \rho(\theta, \eta) d\theta d\eta = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

$$h(\theta, \eta / t_1, t_2, \dots, t_n) \propto \frac{1}{(\theta)^p} L(t_1, t_2, \dots, t_n / \theta, \eta)$$

$$h(\theta, \eta / t_1, t_2, \dots, t_n) \propto \frac{1}{(\theta)^p} \left(\frac{1}{(\theta)^n} \exp \left[- \sum_{i=1}^n (t_i - \eta) / \theta \right] \right)$$

$$h(\theta, \eta / t_1, t_2, \dots, t_n) = C \frac{1}{(\theta)^{n+p}} \exp \left[- \sum_{i=1}^n (t_i - \eta) / \theta \right]$$

$$C^{-1} = \int_0^{t_1} \int_0^\infty \frac{1}{(\theta)^{n+p}} \exp \exp \left[- \sum_{i=1}^n (t_i - \eta) / \theta \right] d\theta d\eta$$

$$\text{Let } u = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \eta)}{\theta}$$

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \eta)}{u}$$

$$du = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \eta)}{u^2} d\theta =$$

$$C^{-1} = \int_0^{t_1} \int_0^\infty \frac{1}{\left(\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \eta)}{u} \right)^{n+p}} e^{-u} \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \eta)}{u^2} du d\eta$$

$$C^{-1} = \int_0^{t_1} \int_0^\infty \frac{u^{n+p-2}}{\left(\sum_{i=1}^n (t_i - \eta) \right)^{n+p-1}} e^{-u} du d\eta$$

$$C^{-1} = \int_0^{t_1} \frac{-1}{\left(\sum_{i=1}^n (t_i - \eta) \right)^{n+p-1}} \left[\int_0^\infty u^{n+p-2} e^{-u} du \right] d\eta$$

$$C^{-1} = \frac{\Gamma(n+p-2)}{n \left(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1) \right)^{n+p-2}}$$

حيث دالة التوزيع اللاحق المشتركة للتوزيع الأسى ذو معلمتين (θ, η) .

$$h(\theta, \eta / t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{n \left(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1) \right)^{n+p-2}}{\Gamma(n+p-2)} \left[\frac{1}{(\theta)^{n+p}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \eta)}{\theta}} \right] \dots (16)$$

$$\theta > 0 \quad 0 < \eta < t_1 < \infty$$

t_1 : يمثل أصغر قيمة في العينة العشوائية بحجم (n).

ولأيجاد دالة التوزيع اللاحق للمعلمة القياس θ .

$$h_1 = (\theta / t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_0^{t_1} h(\theta, \eta / t_1, t_2, \dots, t_n) d\eta \dots (17)$$

بتعويض المعادلة (16) في المعادلة (17) نحصل على دالة التوزيع اللاحق للمعلمة القياس θ .

$$= \int_0^{t_1} \frac{n(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n+p-2}}{\Gamma(n+p-2)} \frac{1}{\theta^{n+p}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \eta)}{\theta}} d\eta$$

$$\frac{n(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n+p-2}}{\Gamma(n+p-2)} \int_0^{t_1} \frac{1}{(\theta)^{n+p}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \eta)}{\theta}} d\eta =$$

$$(d\eta \frac{n}{\theta} \int_0^{t_1} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \eta)}{\theta}} \frac{1}{(\theta)^{n+p}} * \frac{\theta}{n}) = \frac{n \sum_{i=1}^n (t_i - t_1)^{n+p-2}}{\Gamma(n+p-2)}$$

$$h_1 = (\theta / t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n+p-2}}{\Gamma(n+p-2)} \frac{1}{\theta^{n+p-1}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)}{\theta}} \dots (18)$$

ولأيجاد دالة التوزيع اللاحق للمعلمة الأخرى η .

$$h_2(\eta / t_1, t_2, \dots, t_n) d\theta = \int_0^\infty h(\theta, \eta / t_1, t_2, \dots, t_n) d\theta \dots (19)$$

بتعويض معادلة (17) بمعادلة (19) نحصل على .

$$h_2(\eta / t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_0^\infty \frac{n(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n+p-2}}{\Gamma(n+p-2)} \left[\frac{1}{(\theta)^{n+p}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \eta)}{\theta}} d\theta \right]$$

$$h_2(\eta / t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{n(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n+p-2}}{\Gamma(n+p-2)} \int_0^\infty \frac{1}{(\theta)^{n+p}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \eta)}{\theta}} d\theta$$

Let $u = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \eta)}{\theta}$

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \eta)}{u}$$

$$d\theta = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \eta)}{u^2} du$$

$$h_2(\eta / t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{n(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n+p-2}}{\Gamma(n+p-2)} \int_0^\infty \frac{u^{n+p}}{\sum_{i=1}^n (t_i - \eta)^{n+p}} e^{-u} \frac{(\sum_{i=1}^n (t_i - \eta))}{u^2} du$$

$$= \frac{n(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n+p-2}}{\Gamma(n+p-2)} \left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^n (t_i - \eta))^{n+p-1}} \int_0^\infty u^{n+p-2} e^{-u} du \right)$$

$$= \frac{n(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n+p-2}}{\Gamma(n+p-2)} \left(\frac{\Gamma(n+p-1)}{(\sum_{i=1}^n (t_i - \eta))^{n+p-1}} \right)$$

$$h_2(\eta / t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{n \sum_{i=1}^n (t_i - t_1)^{n+p-2} (n+p-2)(n+p-3)!}{(n+p-3)! (\sum_{i=1}^n (t_i - \eta))^{n+p-1}}$$

$$h_2(\eta / t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{n(n+p-2)(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n+p-2}}{(\sum_{i=1}^n (t_i - \eta))^{n+p-1}} \dots (20)$$

ولأيجاد المقدر بيز للمعلمتين التوزيع الأسّي ذو معلمتين (θ, η) لأبد من إيجاد دالة الخسارة حيث تتميز طريقة بيز باحتوائها على أنواع من الدوال الخسارة وهي

1- الدالة الأسية. 2- والدالة الخطأ المربع الموزون 3- دالة لديكروت 4- دالة العامة الأنتروبي 5- دالة التربيعية وهذه الدوال تقسم الى نوعين أساسيين.

النوع الأول. الذي يضم كلا من دالة الخسارة التربيعية و الخطأ المربع حيث تعد الدالتين من دوال متماثلة الخسارة حيث يكون مقدر دالة الخسارة من التقدير متساوي في التجهين حيث أن الاتجاه الموجب Positive trend يساوي الاتجاه السالب Negative trend وتمثل بالصيغة الرياضية الآتية .

$$L(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2 \dots (21)$$

النوع الثاني يضم عدداً من الدوال الخسارة وهي دالة الاسية و دالة العامة الأنتروبي ودالة لديكروت حيث تفترض الدوال أن المقدر للدالة الخسارة يكون غير متساوي ويعطي بالصيغة الرياضية الآتية .

$$L(\hat{\theta}, \theta) = \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta} \right) - \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) \dots (22)$$

حيث تستعمل دالة الخسارة التربيعية (Squared loss function) في حالة التقدير النقطي والصيغة الرياضية تكون:-

$$L = \begin{cases} (\hat{\theta} - \theta)^2 & \hat{\theta} \neq \theta \\ 0 & \hat{\theta} = \theta \end{cases} \quad (\hat{\theta}, \theta) \dots (23)$$

مقدر بيز القياسي لمعلمة القياس θ . ولأيجاد المقدر القياسي للمعلمة θ نستخدم دالة الخسارة التربيعية حيث أن التوقع للدالة الخسارة التربيعية (Squared loss Function) يطلق عليه بدالة المخاطرة.

$$E[L(\hat{\theta}, \theta)] = \int_{\forall \theta}^0 L(\hat{\theta}, \theta) h_1(\theta/t_1, t_2, \dots, t_n) d\theta$$

حيث سيكون مقدر بيز القياسي $\hat{\theta}_B$ للمعلمة θ هو تلك القيمة المتوقعة لهذه المعلمة التي تجعل دالة المخاطرة (Risk Function) في نهايته الصغرى.

حيث يمكن البرهنة أن $\hat{\theta}_B$ للمعلمة θ هو التوقع اللاحق للمعلمة القياس.

$$\begin{aligned} E[L(\hat{\theta}, \theta)] &= \int (\hat{\theta} - \theta)^2 h_1(t_1, t_2, \dots, t_n) d\theta \\ &= \int (\hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}\theta + \theta^2) h_1(t_1, t_2, \dots, t_n) d\theta \\ &= \hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}E(\theta/t_1, t_2, \dots, t_n) + E(\theta^2/t_1, t_2, \dots, t_n) \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} E[L(\hat{\theta}, \theta)] &= 2\hat{\theta} - 2E(\theta/t_1, t_2, \dots, t_n) \\ 2\hat{\theta} - 2E(\theta/t_1, t_2, \dots, t_n) &= 0 \end{aligned}$$

$$\hat{\theta} = E(\theta/t_1, \dots, t_n)$$

أما بالنسبة للمشتقة الجزئية الثانية لدالة المخاطرة (Risk Function) هي.

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{\theta}^2} E[L(\hat{\theta}, \theta)] = 2$$

حيث أن المشتقة الثانية موجبة فإن النقطة الحرجة هي نهاية الصغرى وأن مقدر بيز القياسي للمعلمة القياس θ هو ذلك المقدر الذي يجعل (Risk Function) في النهاية الصغرى. مقدر بيز لمعلمة لقياس θ .

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{BMS} &= E(\theta/t_1, t_2, \dots, t_n) \\ \hat{\theta}_{BMS} &= \int_0^\infty \theta h_1(\theta/t_1, t_2, \dots, t_n) d\theta \quad \dots (24) \end{aligned}$$

وعند تعويض معادلة (24) في معادلة (2) نحصل على.

$$\hat{\theta}_{BMS} = \int_0^\infty \theta * \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)^{n+p-2}}{\Gamma(n+p-2)\theta^{n+p-1}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)}{\theta}} d\theta$$

$$\hat{\theta}_{BMS} = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)}{\Gamma(n+p-2)} \int_0^\infty \frac{1}{\theta^{n+p-2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)}{\theta}} d\theta$$

$$\text{Let } u = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)}{\theta}$$

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)}{u}$$

$$d\theta = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)}{u^2} du$$

$$\hat{\theta}_{BMS} = \frac{(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n+p-2}}{\Gamma(n+p-2)} \int_0^\infty \frac{u^{n+p-2}}{(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n+p-2}} e^{-u} \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)}{u^2} du$$

$$\hat{\theta}_{BMS} = \frac{(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n+p-2}}{\Gamma(n+p-2)} \left(\frac{-1}{(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n+p-3}} \right) \int_0^\infty u^{n+p-4} e^{-u} du$$

$$\hat{\theta}_{BMS} = \frac{-\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)}{(n+p-3)}$$

أن مقدر بيز القياسي لمعلمة القياس θ هو.

$$\hat{\theta}_{BMS} = \frac{n(t_1 - \underline{t})}{n + p - 3}$$

مقدر بيز القياسي لمعلمة الأزاحة η يمكن أيجاده بواسطة استخدام دالة الخسارة التربيعية لمعلمة الأزاحة η . حيث نلاحظ أن مقدر الأزاحة ماهو الا الوسط الحسابي المشروط (Conditional mean) .

$$\hat{\eta}_{BMS} = E[(\eta/t_1, t_2, \dots, t_n)] \quad \dots (25)$$

$$\hat{\eta}_{BMS} = \int_0^{t_1} \eta h_2([\eta/t_1, t_2, \dots, t_n]) d\eta$$

حيث بتعويض قيمة h_2 في المعادلة رقم (25) نحصل على الآتي.

$$= \int_0^{t_1} \eta \left(\frac{(\eta+p-2)n(\sum_{i=1}^n (t_i-t_1))^{n+p-2}}{(\sum_{i=1}^n (t_i-\eta))^{n+p-1}} \right) d\eta$$

$$n+p-2) n \sum_{i=1}^n (t_i - t_1)^{n+p-2} \int_0^{t_1} \eta (\sum_{i=1}^n (t_i - \eta))^{-(n+p-1)} d\eta =$$

بأستخدام التكامل بالتجزئة نحصل على.

$$\text{let } u = \eta$$

$$dv = \sum_{i=1}^n (t_i - \eta)^{-(n+p-1)} d\eta$$

$$du = d\eta$$

$$v = \frac{1}{n(n+p-2)} (\sum_{i=1}^n (t_i - \eta))^{2-n-p}$$

$$\int_0^\infty \eta \left(\sum_{i=1}^n (t_i - \eta) \right)^{-(n+p-1)} du = \int_0^{t_1} u dv = [uv]_0^{t_1} - \int_0^{t_1} v du$$

$$= t_1 \left[\frac{(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{2-n-p}}{n(n+p-2)} \right] - \int_0^{t_1} \frac{1}{n(n+p-2)} (\sum_{i=1}^n (t_i - \eta))^{2-n-p} d\eta$$

$$= \frac{t_1 (\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{2-n-p}}{n(n+p-2)} - \frac{(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{3-n-p}}{n^2(n+p-2)(n+p-3)}$$

$$(t_1 - \frac{(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))}{(n+p-3)}) \frac{(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n-p-2}}{n(n+p-2)} =$$

حيث أن مقدر بيز القياسي لمعلمة الأزاحة η .

$$\hat{\eta}_{BMS} = (n+p-2)n \left(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1) \right)^{n+p-2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)^{2-n-p}}{n(n+p-2)} \left[t_1 - \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)}{n(n+p-3)} \right] \right)$$

$$\hat{\eta}_{BMS} = t_1 - \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - nt_1)}{n(n+p-3)}$$

$$\hat{\eta}_{BMS} = \frac{n(n+p-3)t_1 - \sum_{i=1}^n t_i - nt_1}{n(n+p-3)}$$

$$\hat{\eta}_{BMS} = \frac{n^2 t_1 - nt_1 - nt_1 + nt_1}{n(n+p-3)}$$

حيث مقدر بيز لدالة المعولية للتوزيع الأسّي ذو معلمتين.

$$\hat{R}_{BMS}(t) = \exp \exp \left[-(t - \hat{\eta}_{BMS}) / \hat{\theta}_{BMS} \right] \quad \dots (26)$$

معولية النظام المتوازي للتوزيع الأسّي ذو معلمتين .

$$R_{Sp}(t) = 1 - (1 - e^{-(t - \hat{\eta}_{BMS}) / \hat{\theta}_{BMS}})^k \quad \dots (27)$$

معولية النظام المتوالي (المتسلسل) للتوزيع الأسّي ذو معلمتين.

$$R_S(t) = [e^{-(t - \hat{\eta}_{BMS}) / \hat{\theta}_{BMS}}]^k \quad \dots (28)$$

4- الجانب التجريبي :-

مراحل تجربة المحاكاة.

تم تقسيم تجربة المحاكاة لعدد من المراحل حيث تم كتابة البرنامج للمقارنة بين طرائق التوزيع الأسّي ذو معلمتين وللنظامين المتسلسل والمتوازي باستخدام برنامج الماتلاب (9-MATLAB) وقد تم تطبيق البرنامج على الحاسبة حيث تم أستخراج نتائج

المرحلة الأولى .

1- تعد هذه الخطوة الأساسية في البرنامج وقد أختيرت القيم الافتراضية للمعلمات للتوزيع الأسّي ذو معلمتين التي تتمثل بمعلمة الأزاحة (η) و بمعلمة القياس (θ) حيث تم تشكيل تسعة من الحالات كما في الجدول التالي (1)

الجدول (1)

يبين القيم الافتراضية للمعلمات والنماذج المقترحة

الحالات	معلمة القياس (θ)	معلمة الأزاحة (η)
1	1.5	0.01
2	1.5	0.1
3	1.5	0.5
4	2.5	0.01
5	2.5	0.1
6	2.5	0.5
7	3.5	0.01
8	3.5	0.1
9	3.5	0.5

2- وبالإضافة الى ذلك تم أختيار أربعة أحجام مختلفة للعينات التي تمثل بالآتي

$n = 30, 50, 100, 200$

تم تكرار كل تجربة ($L=1000$) .

3- تم أختيار ثلاثة أوقات لتقدير دالة المعولية ومعدل الفشل وكانت كالآتي:-

$t = 1, 2, 3$

المرحلة الثانية :-

1- الخطوة الثانية في المحاكاة (simulation) يتم توليد البيانات (المتغيرات العشوائية) والتي تتوزع توزيع منتظم ($uniform(u_i)$) ضمن الفترة ($0, t$) وتتولد البيانات بواسطة الحاسبة الإلكترونية وبالأعتماد على الصيغة الآتية :-

$U=RND$

2- لتحويل المتغير الذي تم توليده (الخطوة الثانية) تم أستعمال الأسلوب الرياضي لطريقة التحويل المعكوس (Inverse trans from method) وذلك وكفاءتها في توليد المتغيرات العشوائية والحصول على بيانات تتبع التوزيع الأسّي ذو معلمتين (θ, η)

$v = F(\chi)$... (29)

$$F(\chi) = 1 - \exp[-(t - \eta)/\theta]$$

$$v = 1 - \exp[-(t - \eta)/\theta]$$

$$\exp[-(t - \eta)/\theta] = 1 - v$$

$$[-(t - \eta)/\theta] = \log(1 - v)$$

$$t = \eta - \theta \log(1 - v)$$

المرحلة الثالثة :-

يتم تقدير دالة المعولية للتوزيع الأسّي بمعلمتين (θ, η) وللنظامين المتسلسل والمتوازي والتي تم توضيحها في الجانب النظري وحسب طرائق التقدير الآتية:-

1- طريقة الأماكن الأعظم (MLE).

2- طريقة بيز القياسية (BMS).

المرحلة الرابعة :-

هي مرحلة المقارنة بين طرائق التقدير للتوزيع الأسّي ذو معلمتين وللنظامين المتسلسل والمتوازي لكل (t_i) من الزمن وللمقارنة نستخدم المقياس الأحصائي:-

(Mean Squared Error(MSE

1- متوسط مربعات الخطأ

$$MSE (\hat{R}(t)) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (\hat{R}_i(t) - R(t))^2$$

إذ إن L : عدد التكرارات (Replications) لكل تجربة .

$\hat{R}(t)$: مقدر المعولية حسب الطرائق المستخدم في التقدير

2- مناقشة تجارب المحاكاة

في هذا البحث سيتم مناقشة نتائج تجارب المحاكاة وتحليلها لتقدير دالة المعولية للتوزيع الاسي بمعلمتين وللنظامين المتسلسل والمتوازي بحسب الطرائق الموضحة في الجانب النظري من هذا البحث .
وفيما يأتي النتائج الموضحة في الجداول التي سيتم تحليلها حيث يوضح الجدول من (2) متوسط مربعات الخطأ لتقدير دالة المعولية حسب الحالات التسعة المفترضة وبحسب حجم العينات ولتجربة عدد مكرراتها (=1000):-

n_i	t	MLE	BMS	Best
30	1	0.0047	0.0042	R_{BMS}
	2	0.0044	0.0044	$R_{BMS}&R_{MLE}$
	3	0.0025	0.0028	R_{MLE}
50	1	0.0025	0.0024	R_{BMS}
	2	0.0024	0.0024	$R_{BMS}&R_{MLE}$
	3	0.0014	0.0015	R_{MLE}
100	1	0.0012	0.0012	$R_{BMS}&R_{MLE}$
	2	0.0013	0.0013	$R_{BMS}&R_{MLE}$
	3	0.0008	0.0008	$R_{BMS}&R_{MLE}$
200	1	0.0006	0.0006	$R_{BMS}&R_{MLE}$
	2	0.0006	0.0006	$R_{BMS}&R_{MLE}$
	3	0.0004	0.0004	$R_{BMS}&R_{MLE}$

الجدول (2)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للطرائق التقدير المختلفة للحالة الاولى بالمعلمات المفترضة $(\eta = 0.01, \theta = 1.5)$ وبحسب وحجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها (L=1000)

n_i	t	MLE	BMS	Best
30	1	0.0040	0.0035	R_{BMS}
	2	0.0042	0.0040	R_{BMS}
	3	0.0024	0.0026	R_{MLE}
50	1	0.0024	0.0023	R_{BMS}
	2	0.0026	0.0026	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0015	0.0016	R_{MLE}
100	1	0.0011	0.0011	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0013	0.0012	R_{BMS}
	3	0.0007	0.0008	R_{MLE}
200	1	0.0006	0.0005	R_{BMS}
	2	0.0006	0.0006	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0004	0.0004	$R_{MLE}&R_{BMS}$

الجدول (3)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للطرائق التقدير المختلفة للحالة الثانية بالمعلمات المفترضة $(\eta = 0.1, \theta = 1.5)$ و بحسب حجم العينات ولتجربة عدد مكرراتها (L=1000)

**مقارنة بعض طرائق تقدير دالة المعولية للتوزيع الاسي ذو معلمتين
والنظامين المتسلسل والمتوازي**

n_i	t	MLE	BMS	Best
30	1	0.0027	0.0023	R_{BMS}
	2	0.0048	0.0046	R_{BMS}
	3	0.0032	0.0034	R_{MLE}
50	1	0.0014	0.0012	R_{BMS}
	2	0.0027	0.0026	R_{BMS}
	3	0.0019	0.0020	R_{MLE}
100	1	0.0007	0.0006	R_{BMS}
	2	0.0014	0.0014	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0010	0.0010	$R_{MLE}&R_{BMS}$
200	1	0.0003	0.0003	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0007	0.0007	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0005	0.0005	$R_{MLE}&R_{BMS}$

الجدول (4)
يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للطرائق التقدير المختلفة للحالة الثالثة بالمعلمات المفترضة ($\eta = 0.5, \theta = 1.5$) وبحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها ($L=1000$).

n_i	t	MLE	BMS	Best
30	1	0.0027	0.0023	R_{BMS}
	2	0.0048	0.0046	R_{BMS}
	3	0.0032	0.0034	R_{MLE}
50	1	0.0014	0.0012	R_{BMS}
	2	0.0027	0.0026	R_{BMS}
	3	0.0019	0.0020	R_{MLE}
100	1	0.0007	0.0006	R_{BMS}
	2	0.0014	0.0014	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0010	0.0010	$R_{MLE}&R_{BMS}$
200	1	0.0003	0.0003	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0007	0.0007	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0005	0.0005	$R_{MLE}&R_{BMS}$

الجدول (5)
يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للطرائق التقدير المختلفة للحالة الرابعة بالمعلمات المفترضة ($\eta = 0.01, \theta = 2.5$) وبحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها ($L=1000$).

n_i	t	MLE	BMS	Best
30	1	0.0029	0.0025	R_{BMS}
	2	0.0044	0.0040	R_{BMS}
	3	0.0042	0.0041	R_{BMS}
50	1	0.0018	0.0016	R_{BMS}
	2	0.0028	0.0027	R_{BMS}
	3	0.0027	0.0026	R_{BMS}
100	1	0.0008	0.0008	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0014	0.0013	R_{BMS}
	3	0.0014	0.0014	$R_{MLE}&R_{BMS}$
200	1	0.0004	0.0004	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0006	0.0006	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0006	0.0006	$R_{MLE}&R_{BMS}$

جدول (6)
يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للطرائق التقدير المختلفة للحالة الخامسة بالمعلمات المفترضة ($\eta = 0.1, \theta = 2.5$) وبحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها ($L=1000$).

n_i	t	MLE	BMS	Best
30	1	0.0028	0.0024	R_{BMS}
	2	0.0046	0.0042	R_{BMS}
	3	0.0045	0.0044	R_{BMS}
50	1	0.0015	0.0013	R_{BMS}
	2	0.0027	0.0025	R_{BMS}
	3	0.0027	0.0026	R_{BMS}
100	1	0.0007	0.0006	R_{BMS}
	2	0.0013	0.0013	$R_{MLE\&R_{BMS}}$
	3	0.0013	0.0013	$R_{MLE\&R_{BMS}}$
200	1	0.0003	0.0003	$R_{MLE\&R_{BMS}}$
	2	0.0006	0.0006	$R_{MLE\&R_{BMS}}$
	3	0.0006	0.0006	$R_{MLE\&R_{BMS}}$

جدول (7)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للطرائق التقدير المختلفة للحالة السادسة بالمعلمات المفترضة ($\eta = 0.5, \theta = 2.5$) و بحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها ($L=1000$)

n_i	t	MLE	BMS	Best
30	1	0.0022	0.0016	R_{BMS}
	2	0.0044	0.0040	R_{BMS}
	3	0.0049	0.0048	R_{BMS}
50	1	0.0010	0.0008	R_{BMS}
	2	0.0024	0.0022	R_{BMS}
	3	0.0028	0.0027	R_{BMS}
100	1	0.0004	0.0003	R_{BMS}
	2	0.0012	0.0012	$R_{MLE\&R_{BMS}}$
	3	0.0015	0.0015	$R_{MLE\&R_{BMS}}$
200	1	0.0001	0.0001	$R_{MLE\&R_{BMS}}$
	2	0.0005	0.0005	$R_{MLE\&R_{BMS}}$
	3	0.0007	0.0007	$R_{MLE\&R_{BMS}}$

الجدول (8)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للطرائق التقدير المختلفة للحالة الثامنة بالمعلمات المفترضة ($\eta = 0.01, \theta = 3.5$) و بحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها ($L=1000$)

n_i	t	MLE	BMS	Best
30	1	0.0022	0.0017	R_{BMS}
	2	0.0036	0.0032	R_{BMS}
	3	0.0044	0.0041	R_{BMS}
50	1	0.0012	0.0010	R_{BMS}
	2	0.0022	0.0020	R_{BMS}
	3	0.0028	0.0026	R_{BMS}
100	1	0.0004	0.0004	$R_{MLE\&R_{BMS}}$
	2	0.0010	0.0009	R_{BMS}
	3	0.0013	0.0012	R_{BMS}
200	1	0.0002	0.0002	$R_{MLE\&R_{BMS}}$
	2	0.0005	0.0005	$R_{MLE\&R_{BMS}}$
	3	0.0006	0.0006	$R_{MLE\&R_{BMS}}$

الجدول (9)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للطرائق التقدير المختلفة للحالة الثامنة بالمعلمات المفترضة ($\eta = 0.1, \theta = 3.5$) و بحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها ($L=1000$)

**مقارنة بعض طرائق تقدير دالة المعولية للتوزيع الاسي ذو معلمتين
والنظامين المتسلسل والمتوازي**

n_i	t	MLE	BMS	Best
30	1	0.0025	0.0020	R_{BMS}
	2	0.0042	0.0038	R_{BMS}
	3	0.0050	0.0046	R_{BMS}
50	1	0.0012	0.0010	R_{BMS}
	2	0.0022	0.0020	R_{BMS}
	3	0.0027	0.0025	R_{BMS}
100	1	0.0005	0.0005	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	2	0.0010	0.0010	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	3	0.0013	0.0013	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
200	1	0.0002	0.0002	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	2	0.0005	0.0005	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	3	0.0006	0.0006	$R_{MLE \& R_{BMS}}$

الجدول (10)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للطرائق التقدير المختلفة للحالة التاسعة بالمعلمات المفترضة $(\eta = 0.5, \theta = 3.5)$ و بحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها (L=1000)

n_i	t	MLE	BMS	Best
30	1	0.0019	0.0012	R_{BMS}
	2	0.0032	0.0028	R_{BMS}
	3	0.0045	0.0041	R_{BMS}
50	1	0.0008	0.0005	R_{BMS}
	2	0.0018	0.0016	R_{BMS}
	3	0.0026	0.0025	R_{BMS}
100	1	0.0003	0.0002	R_{BMS}
	2	0.0008	0.0008	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	3	0.0013	0.0012	R_{BMS}
200	1	0.0001	0.0001	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	2	0.0004	0.0004	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	3	0.0007	0.0007	$R_{MLE \& R_{BMS}}$

الجدول (11)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للنظام المتسلسل (المتوالي) للطرائق التقدير المختلفة للحالة الاولى بالمعلمات المفترضة $(\eta = 0.01, \theta = 1.5)$ و بحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها (L=1000).

n_i	t	MLE	BMS	best
30	1	0.0028	0.0024	R_{BMS}
	2	0.0124	0.0111	R_{BMS}
	3	0.0124	0.0125	R_{MLE}
50	1	0.0014	0.0013	R_{BMS}
	2	0.0069	0.0064	R_{BMS}
	3	0.0070	0.0071	R_{MLE}
100	1	0.0006	0.0006	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	2	0.0035	0.0033	R_{BMS}
	3	0.0038	0.0037	R_{BMS}
200	1	0.0003	0.0003	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	2	0.0017	0.0016	R_{BMS}
	3	0.0019	0.0019	$R_{MLE \& R_{BMS}}$

جدول (12)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للنظام المتسلسل (المتوالي) للطرائق التقدير المختلفة للحالة الثانية بالمعلمات المفترضة $(\eta = 0.1, \theta = 1.5)$ و بحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها (L=1000).

n_i	t	MLE	BMS	Best
30	1	0.0002	0.0001	R_{BMS}
	2	0.0079	0.0065	R_{BMS}
	3	0.0130	0.0124	R_{BMS}
50	1	0.0001	0.0001	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0042	0.0037	R_{BMS}
	3	0.0076	0.0072	R_{BMS}
100	1	0	0	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0022	0.0020	R_{BMS}
	3	0.0040	0.0039	R_{BMS}
200	1	0	0	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0011	0.0011	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0021	0.0021	$R_{MLE}&R_{BMS}$

جدول (13)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للنظام المتسلسل (المتوالي) للطرائق التقدير المختلفة للحالة الثالثة بالمعلمات المفترضة $(\eta = 0.5, \theta = 1.5)$ وبحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها $(L=1000)$.

n_i	t	MLE	BMS	best
30	1	0.0018	0.0015	R_{BMS}
	2	0.0111	0.0095	R_{BMS}
	3	0.0118	0.0114	R_{BMS}
50	1	0.0011	0.0009	R_{BMS}
	2	0.0067	0.0061	R_{BMS}
	3	0.0075	0.0074	R_{BMS}
100	1	0.0004	0.0004	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0031	0.0030	R_{BMS}
	3	0.0037	0.0036	$R_{MO-1}&R_{BMS}$
200	1	0.0002	0.0002	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0015	0.0015	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0019	0.0018	R_{BMS}

الجدول (14)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للنظام المتسلسل (المتوالي) للطرائق التقدير المختلفة للحالة الرابعة بالمعلمات المفترضة $(\eta = 0.01, \theta = 2.5)$ وبحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها $(L=1000)$.

n_i	t	MLE	BMS	Best
30	1	0.0003	0.0003	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0040	0.0033	R_{BMS}
	3	0.0096	0.0084	R_{BMS}
50	1	0.0002	0.0002	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0026	0.0023	R_{BMS}
	3	0.0062	0.0056	R_{BMS}
100	1	0.0001	0.0001	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0012	0.0011	R_{BMS}
	3	0.0030	0.0029	$R_{MO-1}&R_{BMS}$
200	1	0	0	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0005	0.0005	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0014	0.0014	$R_{MLE}&R_{BMS}$

جدول (15)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للنظام المتسلسل (المتوالي) للطرائق التقدير المختلفة للحالة الخامسة بالمعلمات المفترضة $(\eta = 0.1, \theta = 2.5)$ وبحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها $(L=1000)$.

**مقارنة بعض طرائق تقدير دالة المعولية للتوزيع الاسي ذو معلمتين
وللنظامين المتسلسل والمتوازي**

n_i	t	MLE	BMS	Best
30	1	0.0002	0.0002	$R_{MLE} & R_{BMS}$
	2	0.0040	0.0033	R_{BMS}
	3	0.0100	0.0087	R_{BMS}
50	1	0.0001	0.0001	$R_{MLE} & R_{BMS}$
	2	0.0022	0.0019	R_{BMS}
	3	0.0058	0.0053	R_{BMS}
100	1	0.0001	0.0001	$R_{MLE} & R_{BMS}$
	2	0.0010	0.0009	R_{BMS}
	3	0.0028	0.0026	R_{BMS}
200	1	0	0	$R_{MLE} & R_{BMS}$
	2	0.0005	0.0004	R_{BMS}
	3	0.0013	0.0012	R_{BMS}

جدول (16)

يبين متوسط مربعات الخطأ
(MSE) لتقدير دالة
المعولية للنظام المتسلسل
(المتوالي) للطرائق التقدير
المختلفة للحالة السادسة
بالمعلمات المفترضة
($\eta = 0.5, \theta = 2.5$)
وبحسب وحجوم العينات
ولتجربة عدد مكرراتها
($L=1000$).

n_i	t	MLE	BMS	Best
30	1	0	0	$R_{MLE} & R_{BMS}$
	2	0.0020	0.0016	R_{BMS}
	3	0.0081	0.0069	R_{BMS}
50	1	0	0	$R_{MLE} & R_{BMS}$
	2	0.0010	0.0009	R_{BMS}
	3	0.0044	0.0039	R_{BMS}
100	1	0	0	$R_{MLE} & R_{BMS}$
	2	0.0005	0.0005	$R_{MLE} & R_{BMS}$
	3	0.0023	0.0022	R_{BMS}
200	1	0	0	$R_{MLE} & R_{BMS}$
	2	0.0002	0.0002	$R_{MLE} & R_{BMS}$
	3	0.0010	0.0009	R_{BMS}

جدول (17)

يبين متوسط مربعات الخطأ
(MSE) لتقدير دالة المعولية
للنظام المتسلسل (المتوالي)
للطرائق التقدير المختلفة
للحالة السابعة بالمعلمات
المفترضة
($\eta = 0.01, \theta = 3.5$)
وبحسب حجوم العينات ولتجربة
عدد مكرراتها ($L=1000$).

n_i	t	MLE	BMS	Best
30	1	0.0001	0.0001	$R_{MLE} & R_{BMS}$
	2	0.0017	0.0014	R_{BMS}
	3	0.0059	0.0049	R_{BMS}
50	1	0	0	$R_{MLE} & R_{BMS}$
	2	0.0008	0.0007	R_{BMS}
	3	0.0030	0.0026	R_{BMS}
100	1	0	0	$R_{MLE} & R_{BMS}$
	2	0.0003	0.0003	$R_{MLE} & R_{BMS}$
	3	0.0013	0.0013	$R_{MLE} & R_{BMS}$
200	1	0	0	$R_{MLE} & R_{BMS}$
	2	0.0002	0.0002	$R_{MLE} & R_{BMS}$
	3	0.0006	0.0006	$R_{MLE} & R_{BMS}$

جدول (18)

يبين متوسط مربعات الخطأ
(MSE) لتقدير دالة المعولية
للنظام المتسلسل (المتوالي)
للطرائق التقدير المختلفة
للحالة الثامنة بالمعلمات
المفترضة
($\eta = 0.01, \theta = 3.5$)
وبحسب حجوم العينات ولتجربة
عدد مكرراتها ($L=1000$).

n_i	t	MLE	BMS	Best
30	1	0	0	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	2	0.0012	0.0010	R_{BMS}
	3	0.0047	0.0039	R_{BMS}
50	1	0	0	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	2	0.0007	0.0006	R_{BMS}
	3	0.0027	0.0024	R_{BMS}
100	1	0	0	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	2	0.0003	0.0003	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	3	0.0012	0.0011	R_{BMS}
200	1	0	0	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	2	0.0001	0.0001	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	3	0.0006	0.0006	$R_{MLE \& R_{BMS}}$

جدول (19)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للنظام المتسلسل (المتوالي) للطرائق التقدير المختلفة للحالة التاسعة بالمعلمات المفترضة $(\eta = 0.5, \theta = 3.5)$ و بحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها (L=1000).

n_i	t	MLE	BMS	Best
30	1	0	0	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	2	0	0	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	3	0	0	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
50	1	0	0	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	2	0.0003	0.0002	R_{BMS}
	3	0.0017	0.0015	R_{BMS}
100	1	0	0	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	2	0.0001	0.0001	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	3	0.0008	0.0008	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
200	1	0	0	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	2	0.0001	0.0001	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	3	0.0004	0.0004	$R_{MLE \& R_{BMS}}$

جدول (20)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للنظام المتوازي للطرائق التقدير المختلف للحالة الاولى بالمعلمات المفترضة

n_i	t	MLE	BMS	best
30	1	0.0048	0.0045	R_{BMS}
	2	0.0013	0.0014	R_{MLE}
	3	0.0002	0.0003	R_{MLE}
50	1	0.0026	0.0025	R_{BMS}
	2	0.0007	0.0007	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	3	0.0001	0.0001	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
100	1	0.0013	0.0013	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	2	0.0004	0.0004	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	3	0.0001	0.0001	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
200	1	0.0006	0.0006	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	2	0.0002	0.0002	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	3	0	0	$R_{MLE \& R_{BMS}}$

جدول (21)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للنظام المتوازي للطرائق التقدير المختلفة للحالة الثانية بالمعلمات المفترضة $(\eta = 0.1, \theta = 1.5)$ و بحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها (L=1000).

n_i	t	MLE	BMS	Best
30	1	0.0046	0.0042	R_{BMS}
	2	0.0013	0.0014	R_{BMS}
	3	0.0002	0.0003	R_{MLE}
50	1	0.0028	0.0027	R_{BMS}
	2	0.0008	0.0009	R_{MLE}
	3	0.0001	0.0002	R_{MLE}
100	1	0.0013	0.0013	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	2	0.0004	0.0004	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	3	0.0001	0.0001	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
200	1	0.0007	0.0006	R_{BMS}
	2	0.0002	0.0002	$R_{MLE \& R_{BMS}}$
	3	0	0	$R_{MLE \& R_{BMS}}$

جدول (22)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للنظام المتوازي للطرائق التقدير المختلفة للحالة الثالثة بالمعلمات المفترضة $(\eta = 0.5, \theta = 1.5)$ و بحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها (L=1000).

**مقارنة بعض طرائق تقدير دالة المعولية للتوزيع الاسي ذو معلمتين
والنظامين المتسلسل والمتوازي**

n_i	t	MLE	BMS	Best
30	1	0.0057	0.0049	R_{BMS}
	2	0.0025	0.0027	R_{MLE}
	3	0.0005	0.0006	R_{MLE}
50	1	0.0029	0.0026	R_{MLE}
	2	0.0014	0.0015	R_{MLE}
	3	0.0003	0.0003	$R_{MLE}&R_{BMS}$
100	1	0.0014	0.0013	R_{BMS}
	2	0.0008	0.0008	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0001	0.0002	R_{MLE}
200	1	0.0007	0.0007	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0004	0.0004	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0001	0.0001	$R_{MLE}&R_{BMS}$

جدول (23)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للنظام المتوازي للطرائق التقدير المختلفة للحالة الرابعة بالمعلميات المفترضة $(\eta = 0.01, \theta = 2.5)$ و بحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها (L=1000).

n_i	t	MLE	BMS	best
30	1	0.0055	0.0046	R_{BMS}
	2	0.0035	0.0034	R_{BMS}
	3	0.0015	0.0017	R_{MLE}
50	1	0.0032	0.0029	R_{BMS}
	2	0.0022	0.0022	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0010	0.0010	$R_{MLE}&R_{BMS}$
100	1	0.0014	0.0013	R_{BMS}
	2	0.0011	0.0011	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0005	0.0005	$R_{MLE}&R_{BMS}$
200	1	0.0007	0.0006	R_{BMS}
	2	0.0005	0.0005	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0002	0.0002	$R_{MLE}&R_{BMS}$

جدول (24)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للنظام المتوازي للطرائق التقدير المختلفة للحالة الخامسة بالمعلميات المفترضة $(\eta = 0.1, \theta = 2.5)$ و بحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها (L=1000).

n_i	t	MLE	BMS	best
30	1	0.0063	0.045	R_{BMS}
	2	0.0051	0.0048	R_{BMS}
	3	0.0026	0.0028	R_{MLE}
50	1	0.0027	0.0021	R_{BMS}
	2	0.0028	0.0027	R_{BMS}
	3	0.0015	0.0015	$R_{MLE}&R_{BMS}$
100	1	0.0010	0.0009	R_{BMS}
	2	0.0015	0.0014	R_{BMS}
	3	0.0008	0.0008	$R_{MLE}&R_{BMS}$
200	1	0.0004	0.0004	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0006	0.0006	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0004	0.0004	$R_{MLE}&R_{BMS}$

جدول (25)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للنظام المتوازي للطرائق التقدير المختلفة للحالة السادسة بالمعلميات المفترضة $(\eta = 0.5, \theta = 2.5)$ و بحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها.

n_i	t	MLE	BMS	best
30	1	0.0057	0.0046	R_{BMS}
	2	0.0038	0.0037	R_{BMS}
	3	0.0017	0.0019	R_{MLE}
50	1	0.0029	0.0025	R_{BMS}
	2	0.0022	0.0022	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0010	0.0011	R_{MLE}
100	1	0.0013	0.0012	R_{BMS}
	2	0.0011	0.0011	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0005	0.0005	$R_{MLE}&R_{BMS}$
200	1	0.0006	0.0006	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0005	0.0005	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0002	0.0002	$R_{MLE}&R_{BMS}$

جدول (26)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للنظام المتوازي للطرائق التقدير المختلفة للحالة السابعة بالمعلمات المفترضة ($\eta = 0.01, \theta = 3.5$) وبحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها ($L=1000$).

n_i	t	MLE	BMS	best
30	1	0.0059	0.0046	R_{BMS}
	2	0.0053	0.0048	R_{BMS}
	3	0.0035	0.0034	R_{BMS}
50	1	0.0027	0.0023	R_{BMS}
	2	0.0027	0.0026	R_{BMS}
	3	0.0019	0.0018	R_{BMS}
100	1	0.0011	0.0011	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0013	0.0013	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0009	0.0009	$R_{MLE}&R_{BMS}$
200	1	0.0005	0.0005	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0006	0.0006	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0004	0.0004	$R_{MLE}&R_{BMS}$

جدول (27)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للنظام المتوازي للطرائق التقدير المختلفة للحالة الثامنة بالمعلمات المفترضة

n_i	t	MLE	BMS	best
30	1	0.0064	0.0039	R_{BMS}
	2	0.0055	0.0048	R_{BMS}
	3	0.0042	0.0041	R_{BMS}
50	1	0.0024	0.0017	R_{BMS}
	2	0.0030	0.0028	R_{BMS}
	3	0.0024	0.0024	R_{BMS}
100	1	0.0008	0.0006	R_{BMS}
	2	0.0014	0.0014	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0012	0.0012	$R_{MLE}&R_{BMS}$
200	1	0.0003	0.0003	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	2	0.0007	0.0007	$R_{MLE}&R_{BMS}$
	3	0.0006	0.0006	$R_{MLE}&R_{BMS}$

جدول (28)

يبين متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير دالة المعولية للنظام المتوازي للطرائق التقدير المختلفة للحالة التاسعة بالمعلمات المفترضة ($\eta = 0.5, \theta = 3.5$) وبحسب حجوم العينات ولتجربة عدد مكرراتها ($L=1000$).

الاستنتاجات:-

- 1- أن المقياس الأحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) يقل عندما يزداد حجم العينة لمعلمتين القياس والازاحة ودالة المعولية للتوزيع الأسّي ذو معلمتين وللنظامين المتسلسل والمتوازي .
- 2- أظهرت عدد التكرات من نتائج المقارنة للطرائق التقدير أن أفضل طريقة للتقدير دالة المعولية للتوزيع الأسّي ذو معلمتين وللنظامين المتسلسل والمتوازي هي طريقة بيز القياسية (BMS).

التوصيات:-

- 1- توصي الباحثين بأجراء بحوث وبأستعمال طرائق تقدير مختلفة لتقدير معلمتي الأراحة (η) والقياس (θ) ودالة المعولية للتوزيع الأسّي ذو معلمتين وللنظامين المتسلسل والمتوازي .
- 2- توصي الباحثة باستعمال النظام الهجين (hybrid system) للتقدير دالة المعولية للتوزيع الأسّي ذو معلمتين.

المراجع:-

- 1- أمل علي غافل، "تقدير معالم والدالة المعولية لتوزيع الأسّي ذو معلمتين بطريقة بيز القياسي"، journal of the college of basic education 18.74 /ملحق (2012).
- 2- العكاري، خضر عام (2020)، "الأستدلال الحصائي باستخدام نظرية بيز"، قسم الإحصاء والبرمجة، كلية الإدارة والاقتصاد – جامعة تشرين .
- 3- جاسم حسن لأزم، (2011)، مقارنة طرائق بيز مع طرائق أخرى لتقدير معلمة القياس لتوزيع وييل باستخدام المحاكاة.
- 4- كامل، براق صبحي عام (2006)، " معولية الأنظمة القابلة للتصليح مع تطبيق علمي"، كلية الإدارة والاقتصاد - جامعة بغداد.
- 5-- Afify , E.E, (2006) " , NOTE ON The Exponential Distribution . Faculty Of ENGINEERING Menowfiy A UNIVERSITY , SHIBEEN . EL. KOOM
- 6- Bartholomew, D. J. (1957). A problem in life testing. Journal of the American Statistical Association, 52(279), 350-355.
- 7- AL-Ani, B. G., AL-Rassam, R. S., & Rashed, S. N. (2020). Bayesian estimation for two parameter exponential distribution using linear transformation of reliability function. Periodicals of Engineering and Natural Sciences (PEN), 8(1), 242-247
- 8-Cohen, A. C., & Helm, F. R. (1973). Estimation in the exponential distribution. Technometrics, 15(2), 415-418.

Reliability of the two-parameter exponential distribution for the serial and parallel systems Comparison of some methods of estimating a function

Rafal Laith Taher

Prof. Hossam Abdul Razzaq Rashid /

Abstract

Some statistical methods have been used to estimate the shifting parameter and the scale parameter for the two-parameter exponential distribution and for the serial and parallel systems. Among these methods that were used for estimation and comparison are the Maximum likelihood (MEL) method and the Standard Bayes method. Where the comparison between these methods was done using the mean of error squares (MSE) statistical scale, and it was concluded through simulation experiments that the best way to estimate the parameters of the two-parameter exponential distribution and to estimate the reliability function and the reliability function of the sequential system and the reliability function of the parallel system is the method BES Standard (BMS).

